

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 66/45
5 Ottobre 1966

D. Senatra: IL MICROTTRONE: TEORIA E PRINCIPALI
ELEMENTI DI PROGETTO. -

(Nota interna: n. 333)

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Nota Interna: n° 333
5 Ottobre 1966

D. Senatra^(x): IL MICROTRONE: TEORIA E PRINCIPALI ELEMENTI DI PROGETTO

INTRODUZIONE. -

Il livello scientifico raggiunto in questi ultimi anni nel campo della fisica nucleare e delle particelle elementari, ha reso particolarmente critico il problema di avere a disposizione fasci di particelle di alta intensità ed alta energia.

Questa nuova svolta della fisica, ha favorito la realizzazione e lo sviluppo di un grandissimo numero di dispositivi: gli acceleratori di particelle, atti a fornire fasci con energie sempre maggiori fino all'ordine di vari GeV.

Scopo del presente lavoro è di illustrare le caratteristiche di funzionamento e i possibili sviluppi del microtrone: un acceleratore per elettroni, che, sebbene noto fin dal 1944, anno in cui fu per la prima volta progettato dal fisico sovietico Veksler, non è stato sino ad oggi valorizzato e sfruttato in proporzione delle sue reali possibilità di impiego.

Nel corso del lavoro si è cercato di offrire una trattazione il più possibile completa e organica dei principali problemi fisici, matematici e realizzativi che si incontrano nella progettazione di tale acceleratore, facendo in modo che le relazioni ottenute tra le varie grandezze in gioco, siano di immediata utilità ed attuazione sperimentale.

Analizzando le caratteristiche dei diversi acceleratori, si può affermare che il microtrone, per semplicità di costruzione, basso costo di esercizio, alta monoenergeticità e collimazione del fascio, e per semplicità di estrazione del medesimo, si presta ottimamente quale iniettore in grandi acceleratori e in dispositivi di accumulazione. E' principalmente per questo fine che esso è oggetto di studio presso i Laboratori Nazionali di Frascati.

L'introduzione poi di alcune modifiche apportate alla iniezione, al focheggiamento, e il progetto di un microtrone per positroni, fanno di questo acceleratore, un dispositivo d'avanguardia per la fisica e la tecnica con possibilità di applicazioni che vanno dalla fisica nucleare alla produzione di onde ultracorte, alla chimica, alla medicina, all'industria.

(x) - Tesi di laurea presso i Laboratori Nazionali di Frascati

CAPITOLO I -

PRINCIPI DI FUNZIONAMENTO DEL MICROTRONE. -

Il microtrone è un acceleratore per elettroni che opera in un campo magnetico uniforme e costante. Esso è costituito essenzialmente (v. fig. 1) da una camera a vuoto a sezione circolare racchiusa dai poli del magnete e avente come parete una fascia metallica al bordo della quale è posta una cavità risonante a frequenza fissa, alimentata attraverso una guida d'onda da un magnetron.

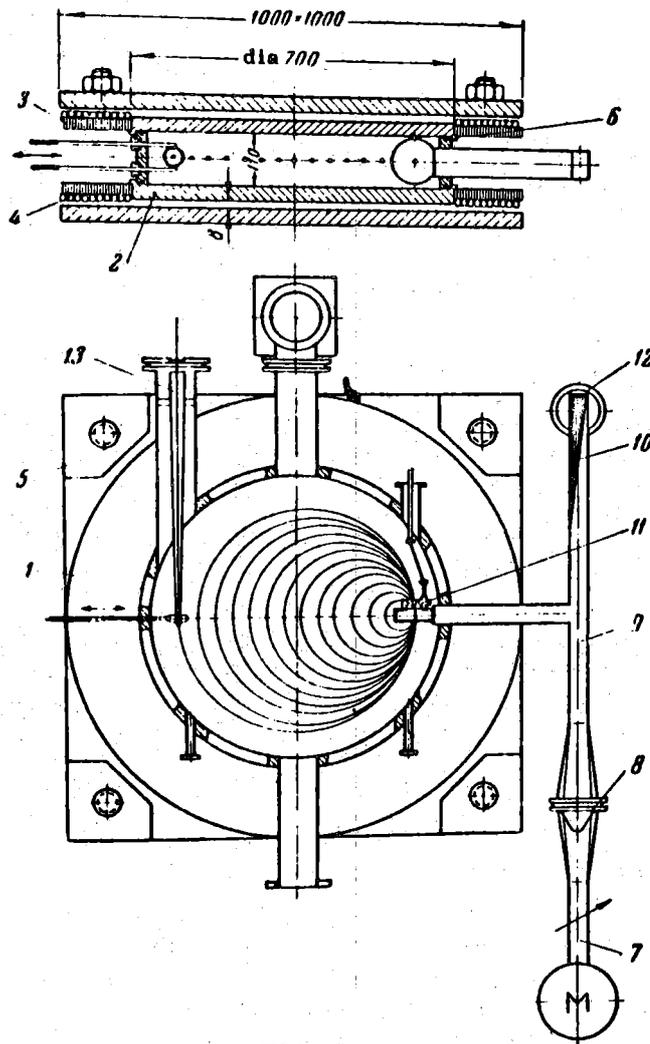


FIG. 1

- 1) Camera da vuoto; 2) Espansioni polari; 3) Bobine; 4) Bobine correttrici; 5) Distanziatori; 6) Guarnizioni; 7) Phase shifter; 8) Flangia; 9) T; 10) Trappola ad acqua; 11) Cavità; 12) Pompa a diffusione.

Gli elettroni siano essi estratti a freddo dalla cavità, o iniettati, per esempio, con un catodo, dopo aver descritto nel campo magnetico uniforme e costante una traiettoria circolare di periodo tale da farli ritornare alla cavità in fase con la radiofrequenza, vengono ivi accelerati dalla tensione $V(t) = V_0 \sin \omega t$ applicata alla cavità (V_0 : valore di picco della tensione, ω : pulsazione).

Per effetto della tensione acceleratrice, gli elettroni transitando in cavità acquistano un incremento in energia e le orbite successivamente descritte sono perciò di raggio via via crescente (v. fig. 2) come segue dalla relazione:

$$(1.1) \quad R = \frac{P}{qB}$$

Come sarà dimostrato in seguito, ad ogni transito compete lo stesso incremento di energie perciò, affinché l'elettrone abbia una data energia prefissata, è sufficiente stabilire il numero n dei transiti necessari per raggiungere tale valore; l'energia massima ottenibile con l'acceleratore è perciò limitata solo dalle dimensioni del magnete.

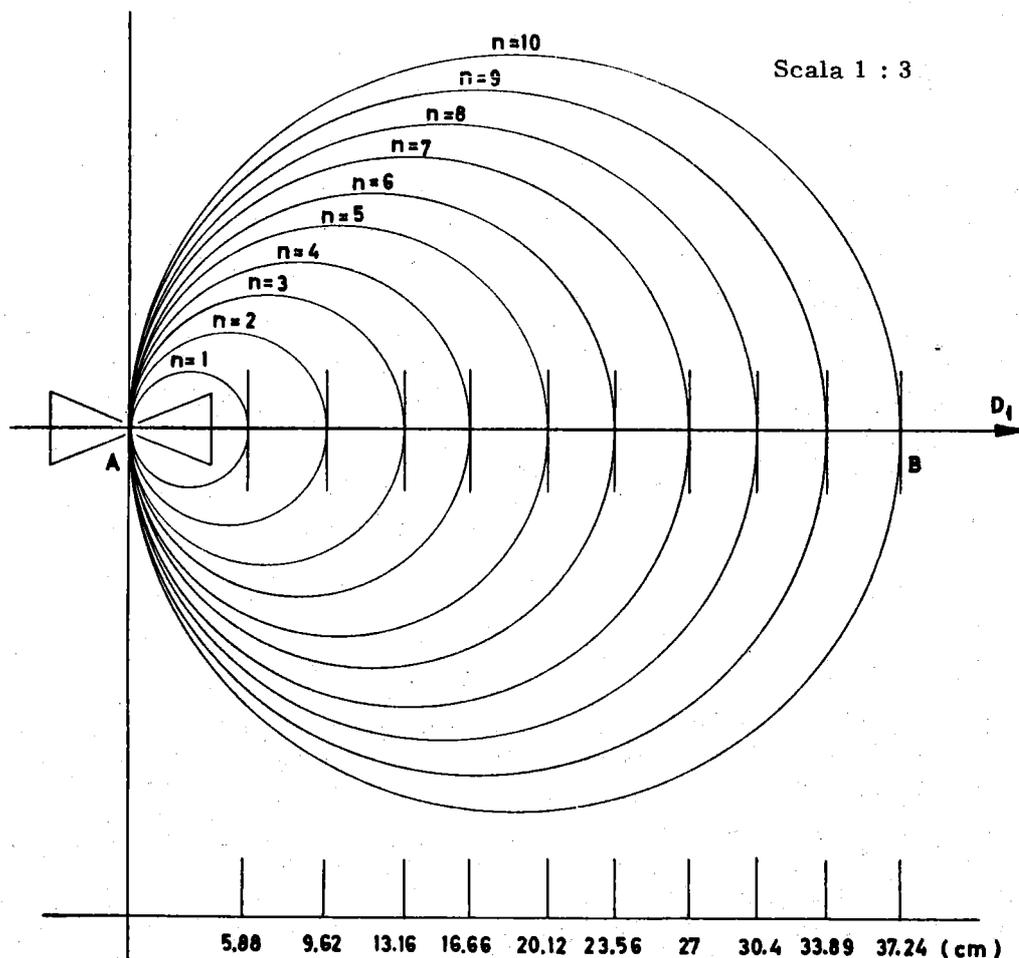


FIG. 2 - Orbite microtrone: modo $a=2$, $b=1$; induzione $B=1$ Kgs

4.

PRIMI CENNI SULLA STABILITÀ DI FASE. -

Prima di dare le condizioni che realizzano il principio di funzionamento del microtrone, introdurremo il concetto di fase e il principio di stabilità di fase.

Consideriamo un elettrone che uscito dalla cavità abbia percorso nel campo magnetico uniforme una orbita di periodo T_1 . Durante questo periodo il campo elettrico alternato, applicato alla cavità, variando con legge sinusoidale, avrà compiuto un numero n di cicli con pulsazione ω .

Affinchè l'elettrone riceva energia al suo rientro in cavità, esso deve aver impiegato a percorrere la propria orbita un periodo T tale da ritrovare il campo elettrico in cavità nella posizione propria a una nuova accelerazione. Esprimeremo questo concetto dicendo che l'elettrone deve rientrare in cavità in fase con il campo elettrico e chiameremo fase l'angolo $\varphi = \omega t$ in cui si trova l'onda di tensione (v. fig. 3) al momento dell'ingresso dell'elettrone nella cavità.

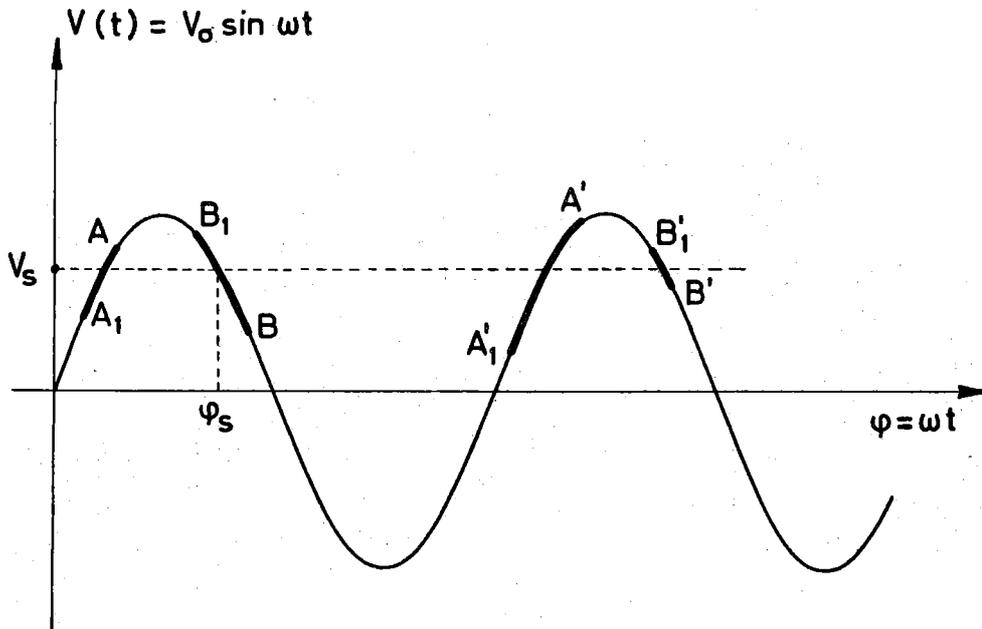


FIG. 3

Tra tutti gli angoli di fase con cui l'elettrone può transitare in cavità, ve n'è uno che realizza le migliori condizioni di accelerazione e che chiameremo angolo di fase sincrona e lo indicheremo con φ_s .

Un elettrone che per tutto il ciclo dell'accelerazione transiti in cavità con una fase $\varphi = \varphi_s$, sarà detto sincrono. Con riferimento alla fig. 3, dove con V_s si intende la tensione incontrata dall'elettrone sincrono, studiamo separatamente gli effetti della parte crescente e decrescente della semionda positiva di $V(t)$ sugli eventuali anticipi o ritardi di un elettrone rispetto all'elettrone sincrono:

a) caso in cui la parte dell'onda di tensione incontra dall'elettrone, sia quella crescente.

Supponiamo che un elettrone ritardi rispetto all'elettrone sincrono. Entrando in A esso riceverà un'energia E_a maggiore dell'energia E_s che compete all'elettrone sincrono, e descriverà un'orbita di raggio maggiore e impiegherà, essendo $v = c = \text{cost.}$, un tempo maggiore, cioè aumenterà il proprio ritardo. Quindi ricomparirà in A' dove riceverà un'energia $E' > E_a > E_s$ e comparirà un'orbita maggiore.

Analogamente un elettrone che anticipi sull'elettrone sincrono ed entri in A_1 , impiegherà un tempo minore e aumenterà, quindi il proprio anticipo ricomparendo in A'_1 .

b) Caso in cui la parte dell'onda di tensione incontrata dall'elettrone sia quella decrescente.

Supponiamo che l'elettrone ritardi sull'elettrone sincrono: entrando in B esso riceverà un'energia $E_b < E_s$, compirà un'orbita di raggio minore, impiegherà un tempo minore, diminuendo così il proprio ritardo e ricomparendo in B'.

Analogamente un elettrone che anticipi sull'elettrone sincrono, entrando in B_1 impiegherà un tempo maggiore diminuendo così il proprio anticipo e ricomparendo in B'_1 .

Da quanto esposto risulta:

I°) Sono accelerati non solo gli elettroni con fase $\varphi = \varphi_s$, ma anche quelli con fase leggermente minore o maggiore della fase sincrona: è, cioè, tollerata una certa oscillazione intorno al valore φ_s .

II°) L'accelerazione avviene sulla parte decrescente dell'onda di tensione la quale esercita un'azione correttiva sull'eventuale anticipo e ritardo degli elettroni rispetto allo elettrone sincrono.

III°) L'intervallo dei valori di φ entro il quale è ancora possibile l'accelerazione è un intervallo limitato, la cui ampiezza è detta larghezza di fase stabile che chiameremo $\Delta\varphi$.

CONDIZIONI DI SINCRONISMO. -

Da quanto esposto al paragrafo precedente, segue che affinché un elettrone sia sincrono è essenziale che il tempo T di percorrenza delle varie orbite sia multiplo del periodo della radiofrequenza; devono cioè essere verificate le seguenti due condizioni di sincronismo:

1°) Il tempo di percorrenza della prima orbita deve essere un multiplo intero del periodo della radiofrequenza T_{rf} .

2°) La differenza dei tempi impiegati a percorrere due orbite successive deve essere multipla intera del periodo T_{rf} .

In formule:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} T_1 &= a T_{rf} \\ \Delta T &= b T_{rf} \end{aligned} \quad (\text{con } a, b, \text{ interi, positivi})$$

Sia T_n il periodo dell'orbita ennesima. Facendo l'approssimazione, in seguito giustificata $v \approx c$, potremo scrivere:

$$(1.3) \quad T_n = \frac{2 \pi R}{v} = \frac{2 \pi E_n}{q B c^2}$$

dove E_n è l'energia totale che compete all'elettrone nell'ennesima orbita e sarà

$$(1.4) \quad E_n = E_0 + n \Delta \mathcal{E}$$

6.

nel caso dell'estrazione a freddo, oppure:

$$(1.4') \quad E_n = E_0 + E_i + n \Delta \mathcal{E}$$

se l'iniezione è fatta con un catodo ed E_i è l'energia di iniezione. $\Delta \mathcal{E}$ sia nella (1.4) che nella (1.4') è l'incremento d'energia acquistato ad ogni transito e E_0 è l'energia di riposo dell'elettrone.

Per le (1.3) (1.4) (1.4'), le (1.2) diventano

$$(1.2') \quad T_1 = \frac{2 \pi E_1}{q B c^2} = a T_{rf}$$

$$T = \frac{2 \pi \Delta \mathcal{E}}{q B c^2} = b T_{rf}$$

Risolvendo le (1.2') rispetto a $\Delta \mathcal{E}$ si ottiene, per la (1.4),

$$(1.5) \quad \Delta \mathcal{E} = E_0 \frac{b}{a - b}$$

$$B = \frac{2 \pi E_0}{q c \lambda} \frac{1}{a - b}$$

e per la (1.4')

$$(1.5') \quad \Delta \mathcal{E} = (E_0 + E_i) \frac{b}{a - b}$$

$$B = \frac{2 \pi (E_0 + E_i)}{q c \lambda} \frac{1}{a - b}$$

Le (1.5) (o 1.5') danno anche:

$$(1.5'') \quad \Delta \mathcal{E} = \frac{b}{2 \pi} q c \lambda B$$

Calcoliamo ora l'espressione dell'incremento di energia $\Delta \mathcal{E}$ che l'elettrone riceve a ciascun transito nella cavità.

Con riferimento alla fig. 4, dove d è la lunghezza della "gap" della cavità, sia:

$$E = E_0 \sin \omega t$$

l'andamento del campo elettrico dovuto alla radiofrequenza. L'energia $\Delta \mathcal{E}$ che un elettrone riceve nel tratto d è:

$$(1.6) \quad \Delta \mathcal{E} = \int_0^d q E_0 \sin \omega t dt$$

La (1.6), valendoci della approssimazione già fatta, $v=c$, si può scrivere:

$$(1.7) \quad \Delta \mathcal{E} = q v E_0 \int_{t_0 - \tau/2}^{t_0 + \tau/2} \sin \omega t dt$$

dove τ è il tempo di transito, cioè il tempo impiegato dall'elettrone a percorrere la "gap"; t_0 è il valore per cui $\omega t_0 = \varphi_s$; $ds = v dt$.

Calcolando l'integrale (1.7) si ottiene:

$$\Delta \mathcal{E} = q E_0 d \frac{\text{sen } \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \text{sen } \varphi_s$$

e cioè:

$$(1.8) \quad \Delta \mathcal{E} = q V_0 \frac{\text{sen } \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \text{sen } \varphi_s$$

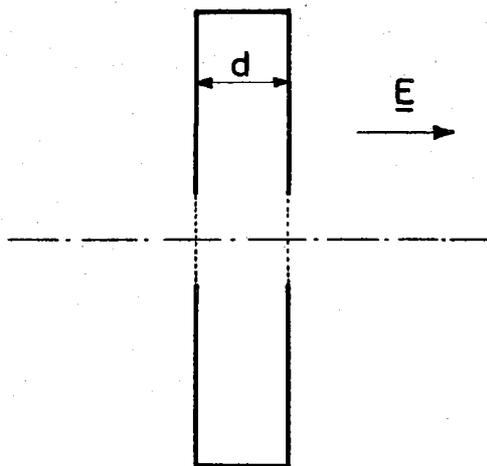


FIG. 4

La (1.8) esprime l'incremento della energia che compete all'elettrone sincro, in funzione della tensione applicata alla cavità.

La (1.8) è rigorosamente valida solo se ammette che:

1°) gli elettroni si muovano in un campo di radiofrequenza parallelamente alle linee di forza.

2°) il campo elettrico E , dovuto alla radiofrequenza sia identicamente nullo all'esterno della cavità.

3°) la variazione di velocità degli elettroni sia estremamente piccola, cioè $v \simeq c$. Proprietà, quest'ultima soddisfatta nel microtrone, già alle basse energie.

Dalla terza ipotesi, già sfruttata in precedenza, segue evidentemente che:

$$\tau = \frac{d}{v} = \text{cost.}$$

per cui si ha:

$$\frac{\omega \tau}{2} = \frac{\pi d}{\lambda_{rf}} = \text{cost.}$$

Sostituendo nella (1.8) avremo:

$$(1.9) \quad \Delta \mathcal{E} = q V_0 \frac{\text{sen } \pi d / \lambda}{\pi d / \lambda} \text{sen } \varphi_s = q V' \text{sen } \varphi_s$$

dove:

$$(1.10) \quad V' = V_0 \frac{\text{sen } \pi d / \lambda}{\pi d / \lambda}$$

Si è così dimostrato che l'incremento $\Delta \mathcal{E}$ di energia per l'elettrone sincro è indipendente dall'orbita di percorrenza ed è costante durante tutto il ciclo dell'accelerazione.

Dalle (1.9) e (1.5'') segue anche l'importante relazione:

$$\frac{b}{2\pi} q c \lambda B = q V' \text{sen } \varphi_s$$

e cioè:

$$\frac{b c \lambda B}{2 \pi V'} = \text{sen } \varphi_s$$

8.

Poichè $\varphi_s \leq 1$ si ha la disuguaglianza:

$$(1.9') \quad \frac{b \lambda B}{V'} \leq \frac{2 \pi}{c}$$

cui devono soddisfare le grandezze sopra definite perchè si possano realizzare le condizioni di sincronismo.

MODI DEL MICROTRONE, -

Consideriamo nuovamente i sistemi di equazioni (1.2) e (1.5). Dal primo risulta che fissare a equivale ad assegnare la molteplicità della prima orbita e fissare b equivale ad assegnare la differenza tra i periodi di due orbite successive rispetto al periodo della radiofrequenza T_{rf} .

Dal secondo risulta che per diversi valori delle costanti a e b , purchè sempre $a > b$, si hanno diversi modi di funzionamento dell'acceleratore e per ogni valore del parametro $(a - b)$ resta univocamente determinato il campo magnetico corrispondente a quel modo e l'incremento di energia acquistato per transito.

Osserviamo inoltre che il campo magnetico non risente della molteplicità dei modi in cui è realizzata la differenza $(a - b)$, mentre l'incremento di energia varia al variare di b per ogni $(a - b)$ fissato.

Un esempio di quanto detto è mostrato dalla tabella I per alcuni valori dei parametri a e b .

TABELLA I

a - b	1	2	3
a	2 3 4	3 4 5	4 5 6
b	1 2 3	1 2 3	1 2 3
$\Delta \mathcal{E}/E_0$	1 2 3	1/2 1 3/2	1/3 2/3 1
B	B_0	1/2 B_0	1/3 B_0

Risolvendo numericamente il sistema di equazioni:

$$(1.11) \quad \frac{\Delta \mathcal{E}}{E_0} = \frac{b}{a - b}$$

$$B = \frac{2 \pi E_0}{q c \lambda} \frac{1}{a - b}$$

per un assegnato valore della lunghezza d'onda e del campo B, si è ottenuto il grafico della fig. 5, dove in ascisse è riportata la molteplicità di b e in ordinata il rapporto tra l'incremento di energia e l'energia E_0 .

Essendo

$$B = \frac{2 \pi E_0}{q c \lambda_{rf}} \frac{1}{a - b}$$

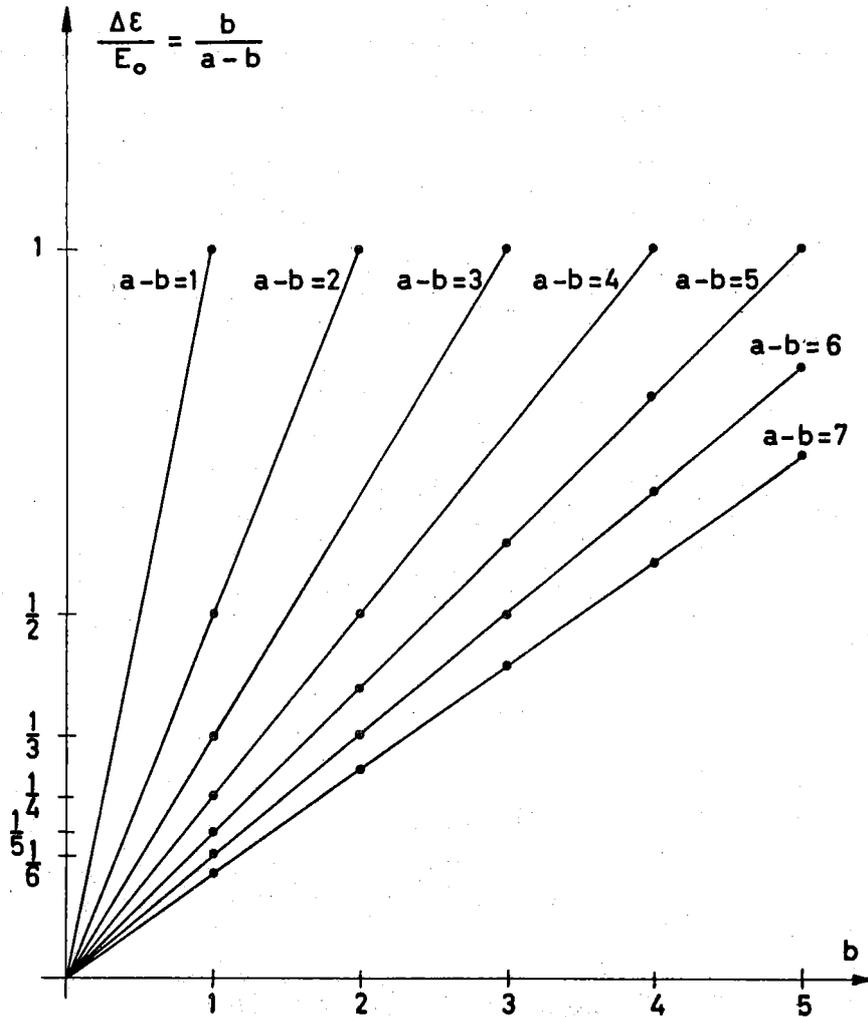


FIG. 5

segue che per

$$\nu = 2800 \text{ Mc/s} \quad \text{e} \quad B_0 = 1000 \text{ gauss}$$

Nel compilare la tabella I ci siamo riferiti al caso di iniezione mediante estrazione a freddo: se si volesse tener conto di un'eventuale energia di iniezione E_i , basterebbe sostituire E_0 con $(E_0 + E_i)$. Dall'esame della tabella I e del grafico di fig. 5, risulta che il valore del campo magnetico relativo al parametro $(a - b) = 1$ è maggiore del valore corrispondente a $(a - b) = 2$, e che per modi più alti si ottengono valori del campo magnetico via via decrescenti. Quindi il campo relativo al modo di operare con $(a - b) = 1$ è il massimo al quale si possa lavorare per una data frequenza prefissata.

Tra tutti i possibili modi in cui si può realizzare $(a - b) = 1$, sembrerebbe, che ai fini del guadagno di energia, fosse preferibile scegliere quello corrispondente a un valore alto di b ; ma un b , per esempio, uguale a 3, significa applicare alla cavità una tensione

$$(1.12) \quad V' = \frac{b}{(a - b)} \frac{E_0}{q} = 1530 \text{ KV}$$

10.

valore praticamente inapplicabile a una cavità la cui lunghezza è dell'ordine di alcuni millimetri.

Per questa ragione occorre scegliere per le costanti a e b , valori piccoli.

Il modo corrispondente ad $a=2$ e $b=1$ è detto "modo fondamentale" in quanto realizza il miglior compromesso tra campo magnetico e incremento d'energia, e fissa per la tensione V' il valore praticamente realizzabile di 510 KV.

Osserviamo infine che fissata la frequenza, il B_{\max} relativo al modo di operare fondamentale e l'energia massima E_{\max} che si desidera ottenere, resta individuato il diametro del magnete più piccolo che consente di ottenere tali energie, cioè:

$$(1.13) \quad D_{\min} = \frac{E_{\max}}{q c B_{\max}}$$

La (1.13) dimostra che c'è una corrispondenza biunivoca tra dimensioni del magnete ed energia massima ottenibile, e che non vi è alcuna possibilità di migliore sfruttamento del nucleo di ferro del magnete.

Questo costituisce uno dei maggiori inconvenienti del microtrone. Vedremo nel Capitolo 4 come, introducendo particolari modifiche, sia possibile ovviare a tale inconveniente.

CAPITOLO 2 -

EQUAZIONE DELLA FASE PER IL MICROTRONE. -

Nel Capitolo 1 abbiamo visto che gli elettroni che attraversano la cavità in fase di tensione decrescente, vengono accelerati stabilmente anche se la loro fase φ non coincide esattamente con φ_s .

Si realizza ciò che potrebbe chiamarsi una "focalizzazione di fase", la cui azione si traduce nella possibilità di definire l'ampiezza $\Delta\varphi$ dell'intervallo dei valori di φ nello intorno della fase sincrona, entro il quale si ha accelerazione in fase stabile, in funzione dei parametri fondamentali dell'acceleratore: tensione, lunghezza della cavità, pulsazione della radiofrequenza.

Come primo passo per la valutazione di $\Delta\varphi$, introdurremo l'equazione della fase valida per il microtrone.

L'equazione della fase per gli acceleratori nei quali l'incremento di energia è comunicato alle particelle da un campo elettrico non conservativo, il cui andamento sia del tipo $E = E_0 \sin \varphi$, ha la forma:

$$(2.1) \quad \ddot{\varphi} = M \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_s} - 1 \right)$$

Equazione valida nel caso si possa trascurare l'energia persa per irraggiamento e che tutte le grandezze in gioco varino lentamente rispetto alle variazioni della fase.

La (2.1) si può interpretare come l'equazione che descrive il moto di un pendolo rigido forzato da un momento costante M .

E' noto che un tale sistema ha due posizioni di equilibrio, una stabile ed una instabile che corrispondono, nella (2.1), ai due angoli per cui $\sin \varphi = \sin \varphi_s$.

Poichè l'accelerazione in fase stabile avviene sulla parte decrescente dell'onda di tensione, sarà posizione di equilibrio stabile quella per cui l'angolo di fase $\omega t = \psi$, è compreso tra $\pi/2$ e π .

Se il sistema si scosta dalla posizione di equilibrio, esso oscilla attorno a questa con moto periodico non armonico. Se lo spostamento supera certi limiti, si possono avere moti non periodici. Analogamente, dalla (2.1) segue che la fase di una particella generica può oscillare attorno alla fase sincrona, oppure allontanarsi da essa indefinitamente.

Graficando le soluzioni della (2.1), per diverse condizioni iniziali, si ottiene un sistema di curve del tipo di quelle disegnate in fig. 6.

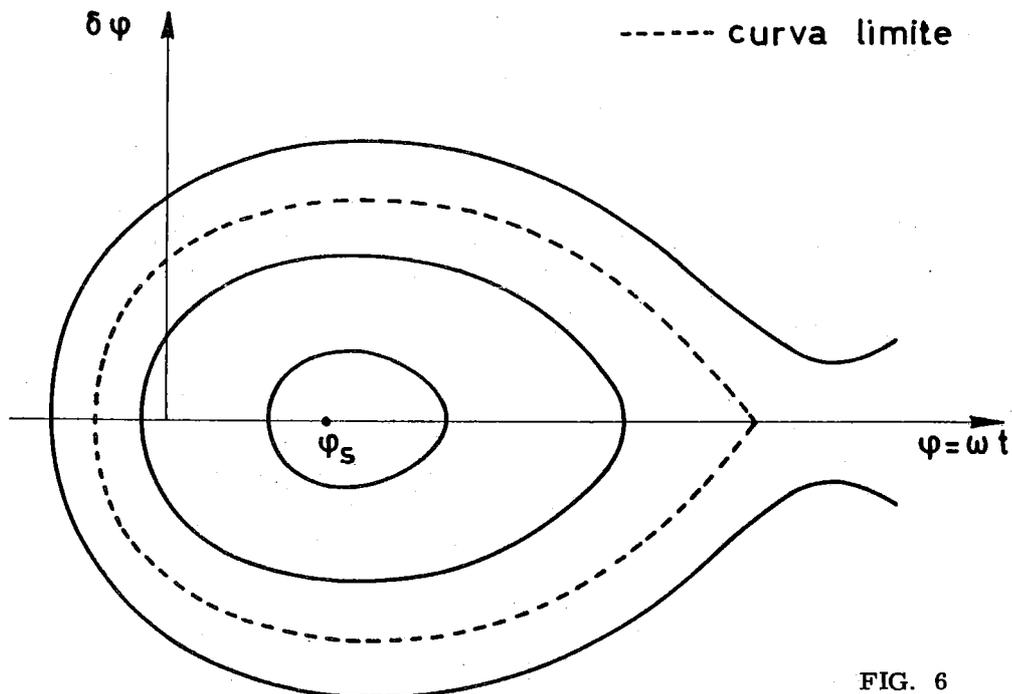


FIG. 6

Si vede che solo le particelle che si trovano all'interno della curva tratteggiata, rimangono nelle vicinanze della particella sincrona; le altre particelle vanno, invece, perdute.

Osserviamo che nella equazione differenziale (2.1), M è una quantità molto minore di 2π : per questa ragione si è potuto considerare la fase variabile con continuità, e, le differenze $\delta X = X - X_s$, tra una grandezza qualsiasi riferita alla particella generica e la stessa grandezza riferita alla particella sincrona, quali quantità piccole, in modo da trattarle come differenziali.

Nel microtrone tale approssimazione non è valida in quanto, come dimostreremo, M è una quantità grande dell'ordine di 2π , e, le oscillazioni di fase sono molto maggiori che negli altri acceleratori.

Quindi, per ricavare l'equazione che regola le oscillazioni di fase in un microtrone, sarà adottato il metodo alle differenze finite, ove, in luogo delle derivate si avranno le differenze finite dell'ordine corrispondente.

Data una grandezza F_k , dipendente dall'indice k , definiamo: differenza del 1° ordine l'espressione:

$$(2.2) \quad \Delta F_k = F_{k+1} - F_k$$

12.

differenze del II^o ordine l'espressione:

$$\Delta^2 F_k = \Delta F_{k+1} - \Delta F_k$$

e per la (2.2)

$$(2.3) \quad \Delta^2 F_k = F_{k+2} - 2F_{k+1} + F_k$$

Essendo nel microtrone

$$(2.4) \quad T_k = \frac{2 \pi E_k}{q B c^2}$$

per la (2.2) si ha:

$$(2.5) \quad \Delta T_k = \frac{2 \pi \Delta E_k}{q B c^2}$$

Indicato con t_k l'istante al quale avviene il k^{mo} transito, la differenza tra gli istanti $(t_{k+1} - t_k)$ ai quali avvengono due transiti successivi, è proprio il periodo T_k che la particella impiega a percorrere l'orbita k^{ma} , cioè:

$$(2.6) \quad \Delta t_k = T_k$$

e, per la (2.5)

$$(2.7) \quad \Delta T_k = \Delta^2 t_k$$

ΔE_k rappresenta, per al (2.2), la differenza tra l'energia della particella alla fine del $(k+1)^{\text{mo}}$ transito, meno l'energia alla fine del k^{mo} e, cioè, l'energia comunicata alla particella all'inizio del $(k+1)^{\text{mo}}$ transito all'istante t_{k+1} .

Perciò:

$$(2.8) \quad \Delta E_k = qV' \text{sen } \omega t_{k+1}$$

Sostituendo nella (2.5) si ottiene:

$$(2.9) \quad \Delta^2 t_k = \frac{2 \pi V' \text{sen } \omega t_{k+1}}{B c^2}$$

In accordo con le condizioni di sincronismo:

$$T_1 = a T_{\text{rf}}$$

$$\Delta T_k = b T_{\text{rf}}$$

equivalenti alle:

$$\frac{2 \pi E_1}{q B c^2} = a T_{\text{rf}}$$

$$\frac{2 \pi \Delta E_k}{q B c^2} = b T_{\text{rf}}$$

introducendo la "fase sincrona generalizzata": $(\Phi_k)_s = \omega t_{k,s}$ in funzione dei parametri di molteplicità a e b .

Con riferimento alla fig. 7, ove è riportato andamento dell'onda di tensione avremo:

$$(\Phi_k)_s = \varphi_s + \omega T_1 + \omega T_2 + \omega T_3 + \omega T_4 + \dots + \omega T_{k-1};$$

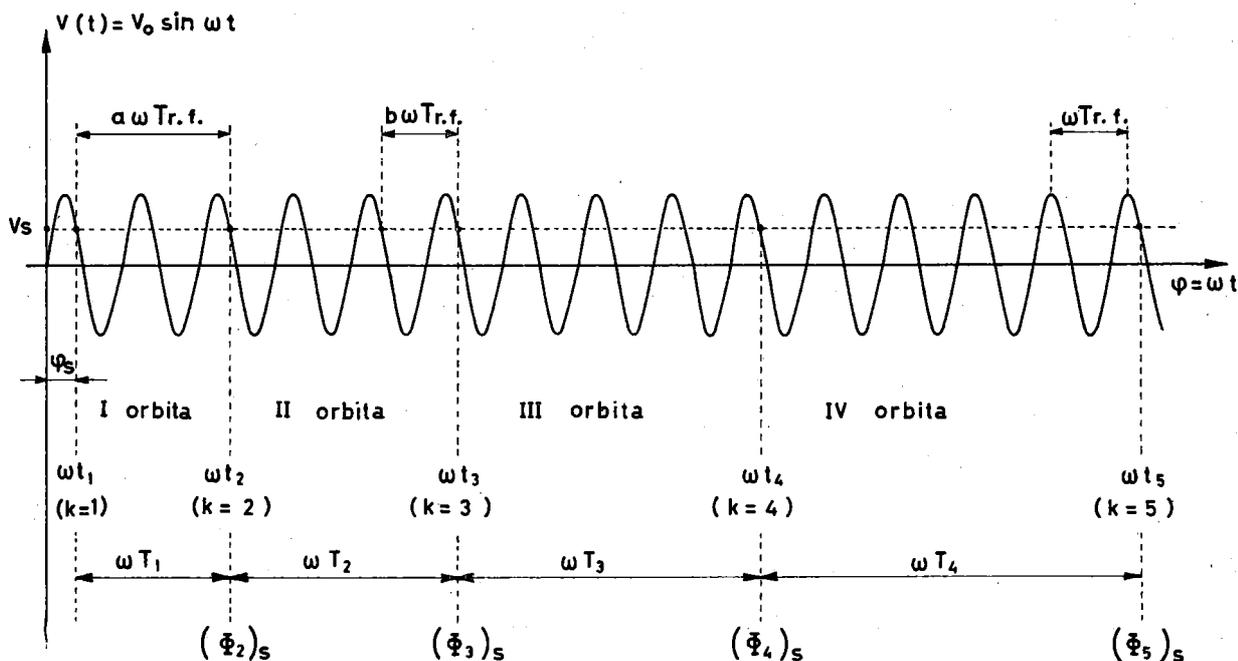


FIG. 7

con facili passaggi, tenendo presente che $T_k = T_1 + (k-1)bT_{rf}$ si ottiene:

$$(2.10) \quad (\Phi_k)_s = \varphi_s + \pi(k-1) [2a + (k-2)b]$$

dove il secondo membro è, per definizione di fase sincrona, un multiplo di 2π .

Per una particella non sincrona si consideri la quantità φ_k , che chiameremo "fase generalizzata", variante tra $\pi/2$ e π (c.fr. le condizioni di accelerazione in fase stabile), così definita:

$$(2.11) \quad \varphi_k = \varphi_s + \Phi_k - (\Phi_k)_s$$

ove $\Phi_k = \omega t_k$.

La (2.11) rappresenta la variazione dalla fase sincrona di una particella qualsiasi, al k^{mo} transito, riferita alla corrispondente variazione della particella sincrona.

Dalla (2.11) si ha:

$$(2.12) \quad \Delta^2 \varphi_k = \Delta^2 \Phi_k - \Delta^2 (\Phi_k)_s$$

dove:

14.

$$(2.13) \quad \Delta^2 \Phi_k = \Delta^2 \omega t_k = \omega \Delta^2 t_k$$

e

$$\Delta^2 (\Phi_k)_s = \tau \Delta^2 \left\{ (k-1) [2a + (k-2)b] \right\}$$

Applicando la (2.3) si ottiene infine:

$$(2.14) \quad \Delta^2 (\Phi_k)_s = 2 \pi b$$

Sostituendo i valori trovati nella (2.12) si ha:

$$\Delta^2 \varphi_k = \omega \Delta^2 t_k - 2b \pi$$

da cui:

$$\omega \Delta^2 t_k = \Delta^2 \varphi_k + 2b \pi$$

che sostituita nella (2.8) da, essendo:

$$\frac{2 \pi}{T_{rf}} = \omega \quad \text{e} \quad \frac{2 \pi V' \text{sen } \varphi_s}{B c^2} = b T_{rf}$$

$$(2.15) \quad \Delta^2 \varphi_k = 2 \pi b \left(\frac{\text{sen } \varphi_{k+1}}{\text{sen } \varphi_s} - 1 \right)$$

La (2.15) è l'equazione della fase per il microtrone.

Confrontando la (2.15) con la (2.1), si vede che l'equazione differenziale (2.1) è un caso particolare dell'equazione alle differenze finite (2.15), e, che la quantità M è nel caso del microtrone dell'orbita di 2π .

Per risolvere analiticamente la (2.15) occorre trasformarla in una equazione lineare alle differenze finite.

Faremo l'ipotesi che gli spostamenti della fase dalla fase sincrona siano piccoli e porremo

$$\varphi_k = \varphi_s + u_k$$

con u_k quantità del 1° ordine: cioè $|u_k| \ll \varphi_s$

Sostituendo nella (2.15) si ottiene:

$$(2.17) \quad \Delta^2 u_k = 2 \pi b \left(\frac{\text{sen}(\varphi_s + u_{k+1})}{\text{sen } \varphi_s} - 1 \right)$$

e per la (2.3):

$$(2.18) \quad u_{k+2} - 2 u_{k+1} + u_k = 2 \pi b \left(\frac{\text{sen}(\varphi_s + u_{k+1})}{\text{sen } \varphi_s} - 1 \right)$$

Facendo l'approssimazione:

$$\operatorname{sen} \varphi_s \operatorname{cos} u_{k+1} + \operatorname{cos} \varphi_s \operatorname{sen} u_{k+1} \simeq \operatorname{sen} \varphi_s + \operatorname{cos} \varphi_s u_{k+1}$$

dalla (2.17) segue:

$$(2.19) \quad u_{k+2} - 2u_{k+1} (1 + b \pi \cotg \varphi_s) + u_k = 0$$

Posto: $A = (1 + b \pi \cotg \varphi_s)$

la (2.19) assume la forma più compatta:

$$(2.20) \quad u_{k+2} - 2u_{k+1} A + u_k = 0$$

La (2.20) è l'equazione lineare alle differenze finite la cui soluzione dà l'andamento delle piccole oscillazioni di fase nel microtrone.

Per risolvere la (2.20) basta porre:

$$u_k = \alpha q^k$$

e risolvere la corrispondente equazione caratteristica di II° grado:

$$q^2 - 2Aq + 1 = 0$$

Dette q_1 e q_2 le radici di questa equazione la generica soluzione della (2.20) sarà del tipo:

$$(2.21) \quad u_k = \alpha_1 q_1^k + \alpha_2 q_2^k$$

Con α_1 ed α_2 costanti.

Supponiamo sia $(A^2 - 1) < 0$
avremo:

$$q_{1,2} = A \mp i \sqrt{1 - A^2}$$

Il numero complesso:

$$(A \mp i \sqrt{1 - A^2}), \text{ di modulo } \mathcal{A} = |A \mp i \sqrt{1 - A^2}| = 1,$$

si può porre nella forma: $\mathcal{A} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

Nel caso specifico:

$$\cos \theta = A$$

$$(2.22) \quad \operatorname{sen} \theta = \sqrt{1 - A^2}$$

per cui

$$q_1^k = \operatorname{cos} k \theta + i \operatorname{sen} k \theta$$

$$q_2^k = \operatorname{cos} k \theta - i \operatorname{sen} k \theta$$

Sostituendo nella (2.21) si ottiene:

$$(2.23) \quad u_k = \gamma_1 \operatorname{cos} k \theta + \gamma_2 \operatorname{sen} k \theta$$

dove:

16.

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2) \\ -i \gamma_2 &= (\alpha_1 - \alpha_2)\end{aligned}$$

Dalla (2.23), mediante la posizione:

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \operatorname{tg}^2 \delta \\ -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} &= \operatorname{tg} \delta\end{aligned}$$

segue la soluzione dell'equazione alle differenze (2.20)

$$\begin{aligned}(2.24) \quad u_k &= \gamma \cos(k\theta + \delta) \\ \cos \theta &= (1 + \pi b \operatorname{cotg} \varphi_s)\end{aligned}$$

con γ e δ nuove costanti. γ e θ sono rispettivamente l'ampiezza e la pulsazione delle oscillazioni di fase.

Dalle (2.24) risulta che, essendo $|\cos \theta| < 1$, deve essere:

$$-1 < 1 + \pi b \operatorname{cotg} \varphi_s < +1$$

da cui:

$$-2 < \pi b \operatorname{cotg} \varphi_s < 0$$

cioè:

$$(2.25) \quad -\frac{2}{\pi b} < \operatorname{cotg} \varphi_s < 0$$

Dalla (2.25) segue per φ_s , nel caso $a=2$, $b=1$,

$$(2.26) \quad 90^\circ < \varphi_s < 122^\circ 26'$$

E' ragionevole ora, definire come "fase sincrona ottima", il valore corrispondente a $\cos \theta = 0$; cioè:

$$\operatorname{cotg} \varphi_s = -\frac{1}{\pi b}$$

da cui segue; per $b=1$,

$$(2.26') \quad (\varphi_s)_{\text{ott.}} = 107^\circ 39'$$

Sempre dalle (2.24), interpretando θ come "pulsazione" dell'oscillazione, si risale al periodo dell'oscillazione stessa, tramite la relazione:

$$(2.27) \quad T = \frac{2\pi}{\theta}$$

Poichè nell'intervallo di stabilità per la φ_s è:

$$0 < \theta < \pi$$

risulta:

$$2 < T < \infty$$

In particolare, in corrispondenza di $(\varphi_s)_{\text{ott}}$, si ha, essendo $\theta = \pi/2$, $T_{\text{ott}} = 4$.

La (2.26) rappresenta l'intervallo dei valori di φ_s per i quali l'acceleratore può operare stabilmente.

Questo intervallo è indipendente dai particolari parametri dell'acceleratore e valido per tutti i microtroni, purchè si adotti come "modo", quello "fondamentale".

Per una particolare macchina il valore di φ_s si ricava dalla equazione già stabilita nel Capitolo 1:

$$\text{sen } \varphi_s = \frac{bc \lambda_{\text{rf}} B}{2 \pi V'}$$

Nel paragrafo seguente studieremo il problema delle oscillazioni di fase, senza porre limitazioni sull'ampiezza delle medesime.

CALCOLO DELLA REGIONE ANGOLARE DI FASE STABILE NEL CASO DI OSCILLAZIONI DI GRANDE AMPIEZZA. -

Nella presente trattazione faremo le seguenti ipotesi:

- 1) il campo elettrico in cavità si assume omogeneo e uniforme;
- 2) la lunghezza della "gap" piccola rispetto alla lunghezza d'onda della radiofrequenza;
- 3) l'elettrone è supposto sempre relativistico;
- 4) il microtrone opera nel modo fondamentale; ($a = 2$, $b = 1$);
- 5) l'iniezione avviene mediante estrazione a freddo.

Le condizioni 2) e 3), equivalgono a considerare come istantaneo il passaggio dello elettrone in cavità.

Dalla definizione di fase generalizzata,

$$\varphi_k = \varphi_s + \Phi_k - (\Phi_k)_s$$

si ha:

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \Phi_{k+1} - \Phi_k - [(\Phi_{k+1})_s - (\Phi_k)_s]$$

$$\text{ma, } \Phi_k = \omega t_k \quad \text{e, } (\Phi_k)_s = \omega (t_k)_s$$

per cui, sostituendo,

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \omega \left\{ (t_{k+1} - t_k) - [(t_{k+1})_s - (t_k)_s] \right\}$$

ma, in generale,

$$t_{k+1} - t_k = T_k$$

per cui:

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \omega [T_k - (T_k)_s]$$

Essendo:

18.

$$T_k = \frac{2 \pi E_k}{q B c^2}$$

ricordando che:

$$\omega = \frac{B c^2}{V' \sin \psi_s}$$

e

$$\Delta \mathcal{E} = qV' \sin \psi_s$$

e che la quantità:

$$\delta X = X - X_s$$

rappresenta la differenza tra una grandezza qualsiasi, riferita alla generica particella, e la stessa grandezza riferita alla particella sincrona, avremo:

$$(2.28) \quad \psi_{k+1} - \psi_k = 2 \pi \frac{\delta E_k}{\Delta \mathcal{E}}$$

Essendo:

$$(2.29) \quad (E_{k+1})_s - (E_k)_s = \Delta \mathcal{E}$$

avremo:

$$(2.29') \quad (E_{k+1})_s = (E_k)_s + \Delta \mathcal{E} = (E_k)_s + qV' \sin \psi_s$$

Dalla definizione di δE_k segue inoltre,

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \delta E_{k+1} &= E_{k+1} - (E_{k+1})_s \\ \delta E_k &= E_k - (E_k)_s \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro le (2.30) e ricordando la (2.29) avremo:

$$\delta E_{k+1} - \delta E_k = (E_{k+1} - E_k) - \Delta \mathcal{E}$$

ma

$$(E_{k+1} - E_k) = qV' \sin \psi_{k+1}$$

per cui

$$(2.31) \quad \delta E_{k+1} - \delta E_k = qV' \sin \psi_{k+1} - \Delta \mathcal{E}$$

Una volta assegnati i valori iniziali ψ_1 e δE_1 , è possibile risolvere numericamente le equazioni (2.28) e (2.31) ricavando, con sostituzioni ricorrenti, i successivi valori ψ_k , δE_k ($k = 2, 3, \dots$).

Associando ad ogni coppia di valori ψ_k , δE_k ($k = 1, 2, \dots$) un punto rappresentativo P_i nel piano (ψ , δE), si ottiene una serie di punti che descrivono una curva pseudo-continua. Naturalmente si avrà una curva per ogni coppia di valori iniziali (ψ_1 e δE_1).

Poichè ogni punto P_i rappresenta lo stato di un elettrone nell'istante di transito in cavità, potremo dire che un elettrone viene stabilmente accelerato solo se la curva corrispondente è una curva chiusa.

Analogamente una curva aperta corrisponde ad un elettrone non stabilmente accelerato, nel senso che la sua fase e la sua energia si discostano definitivamente dalla fase e dalla energia della particella sincrona.

Per ogni valore di φ_s esiste una famiglia di curve ognuna delle quali corrisponde, come detto precedentemente, ad una coppia dei valori iniziali di φ_1 ed δE_1 . In ogni famiglia resta individuata una curva chiusa limite. La regione del piano $\varphi, \delta E$, racchiusa entro la curva limite sarà chiamata "regione di fase stabile".

RICERCA DEI LIMITI DI FASE STABILE. -

Il problema della determinazione dell'intervallo di fase stabile, consiste nella ricerca dei valori limiti φ_1' e φ_1'' per i quali i corrispondenti punti rappresentativi nel piano $\varphi, \delta E$ giacciono proprio sulla curva limite.

Si tratta quindi di costruire la curva $\delta E = f(\varphi)$ e ricavarne le intersezioni con la curva limite.

Dalla espressione della fase generalizzata φ_k e ricordando le espressioni di Φ_k e $(\Phi_k)_s$ si ha, effettuando i calcoli:

$$\Delta \varphi_k = \omega \Delta t_k - 2\pi [a + (k-1)b]$$

Ricordando che:

$$T_{k,s} = [a + (k-1)b] T_{rf}$$

segue:

$$\Delta \varphi_k = \omega (T_k - T_{k,s})$$

Essendo poi

$$T_k = \frac{2\pi E_k}{q B c^2}$$

si ottiene:

$$(2.32) \quad \Delta \varphi_k = \frac{2\pi \omega}{q B c^2} (E_k - E_{k,s})$$

Naturalmente il calcolo va eseguito per l'elettrone percorrente la prima orbita, e cioè per $k=1$.

Quindi dalla (2.32) segue:

$$\Delta \varphi_1 = \frac{2\pi \omega V'}{B c^2} (\text{sen } \varphi_1 - \text{sen } \varphi_s),$$

e cioè:

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi \omega V'}{B c^2} (\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_s),$$

avendo posto semplicemente $\varphi_1 = \varphi$.

20.

Ricordando che

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{rf}} \quad \text{e} \quad \frac{2\pi V' \sin \psi_s}{B c^2} = b T_{rf}$$

segue ancora:

$$\Delta \psi = 2\pi b \left(\frac{\sin \psi}{\sin \psi_s} - 1 \right)$$

Essendo:

$$\Delta \psi = 2\pi \frac{\delta E}{\Delta \varepsilon} \quad \text{e} \quad b = 1$$

si ha, sostituendo,

$$(2.33) \quad \delta E = \Delta \varepsilon \left(\frac{\sin \psi}{\sin \psi_s} - 1 \right)$$

Nella fig. 8, insieme alla curva limite relativa a $\psi_s = (\psi_s)_{ott.} = 107^\circ 39'$, è dato il grafico della funzione (2.33) e sono indicati i valori di ψ_1' e ψ_1'' .

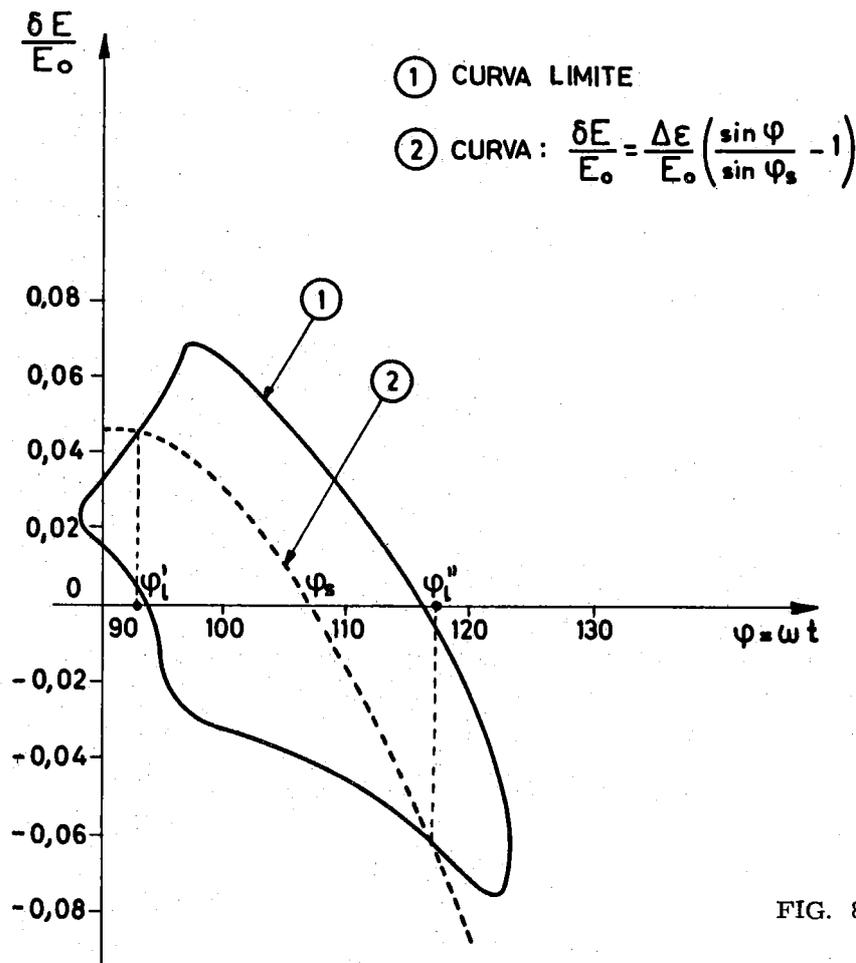


FIG. 8

Risulta:

$$\psi_1' = 93^\circ \quad \text{e} \quad \psi_1'' = 117^\circ$$

L'intervallo di fase utile per l'accelerazione è perciò di circa 24° .

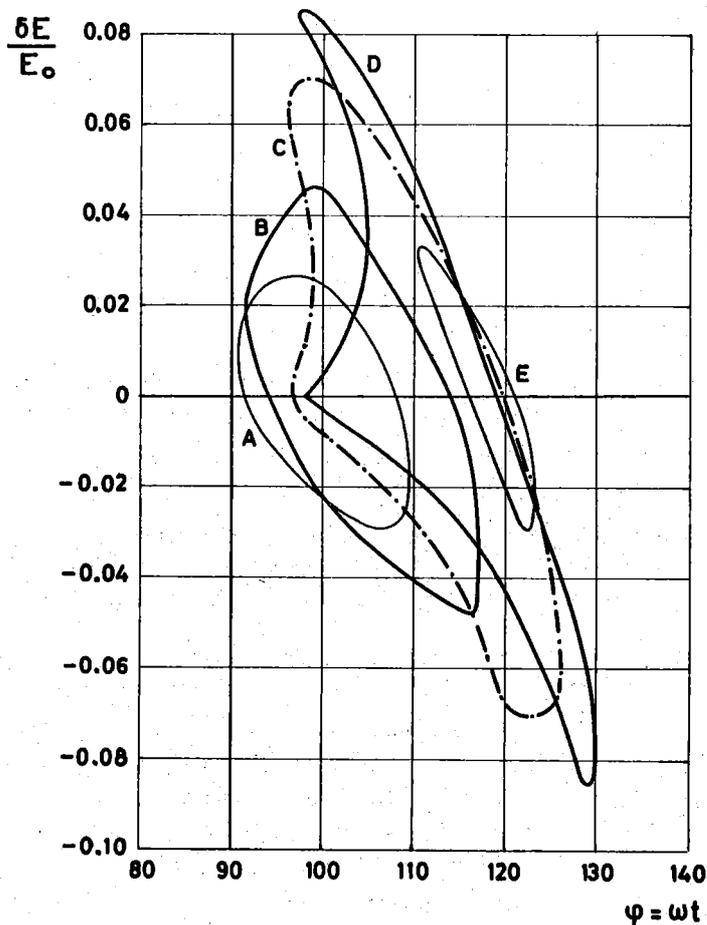
In fig. 9 sono riportate alcune "curve limite" calcolate in base ai parametri del microtrone di Frascati:

$$B_0 = 1000 \text{ gauss}$$

$$\lambda = 10,7 \text{ cm}$$

$$a = 2$$

$$b = 1$$



REGIONE DI FASE STABILE

$$A = 530 \text{ KV}$$

$$B = 540 \text{ KV}$$

$$C = 560 \text{ KV}$$

$$D = 570 \text{ KV}$$

$$E = 590 \text{ KV}$$

FIG. 9

Le varie curve si riferiscono ognuna a un valore differente di V_0 e perciò di ψ_s . Riportiamo qui di seguito una tabella riassuntiva con i valori di ψ_s , ψ_1' e ψ_1'' relativi a ciascun valore di V_0 .

TABELLA II

Curva	V_0 (KV)	ψ_s	ψ_1'	ψ_1''
A	530	102°50'	93°	108°
B	540	106°50'	96°	114°
C	560	112°40'	98°	121°
D	570	114°50'	102°	119°
E	590	119°	117°	121°30'

CAPITOLO 3 -

EFFETTI DELLA DISOMOGENEITA' DEL CAMPO MAGNETICO SUL MOTO DEGLI ELETTRONI. -

Da quanto detto sin'ora, risulta che il microtrone è un acceleratore privo di dispositivi atti a sopperire ad eventuali irregolarità del campo magnetico guida.

E' quindi chiaro che una caratteristica del microtrone è l'esigenza di un magnete i cui poli siano realizzati con la massima accuratezza possibile.

Studiando l'effetto del campo magnetico non omogeneo sul moto di un elettrone sarà possibile dare l'ordine di grandezza dello spostamento massimo che può subire l'elettrone per potere ancora rientrare nella cavità ed essere quindi successivamente accelerato.

Supporremo nella seguente trattazione che la cavità sia di forma cilindrica, gli elettroni relativistici sin dalla prima orbita, la "gap" di lunghezza trascurabile.

Nella fig. 10, si è supposto che il campo magnetico abbia una componente diversa da zero solo nella direzione dell'asse z e che il moto degli elettroni giaccia nel piano mediano (x, y), perpendicolarmente all'asse z. Si è solo sostituito ad un campo magnetico B costante un campo $B = B(x, y)$ variabile da punto a punto in maniera che tale variazione possa essere considerata una perturbazione del primo ordine.

Con la curva tratteggiata si è indicata l'orbita "imperturbata", e, con la curva continua l'orbita "perturbata".

Per effetto della disomogeneità si ha:

I) che l'orbita perturbata attraversa la cavità non più nel punto A, ma in un punto A', in genere diverso da A; si ha cioè uno spostamento $\Delta X = V'(AA')$, del fascio nella direzione dell'asse x.

II) che il centro di curvatura dell'orbita perturbata, non è in C, ma in C', in genere diverso da C; si ha quindi uno spostamento dei centri delle orbite.

III) che, al termine di un periodo T , la particella si trova in A'' anzichè in A ; si ha quindi un avanzamento o un ritardo sulla traiettoria imperturbata lungo la direzione dell'asse y di una quantità, che chiameremo ΔY , uguale alla componente secondo y del vettore $\underline{AA''}$.

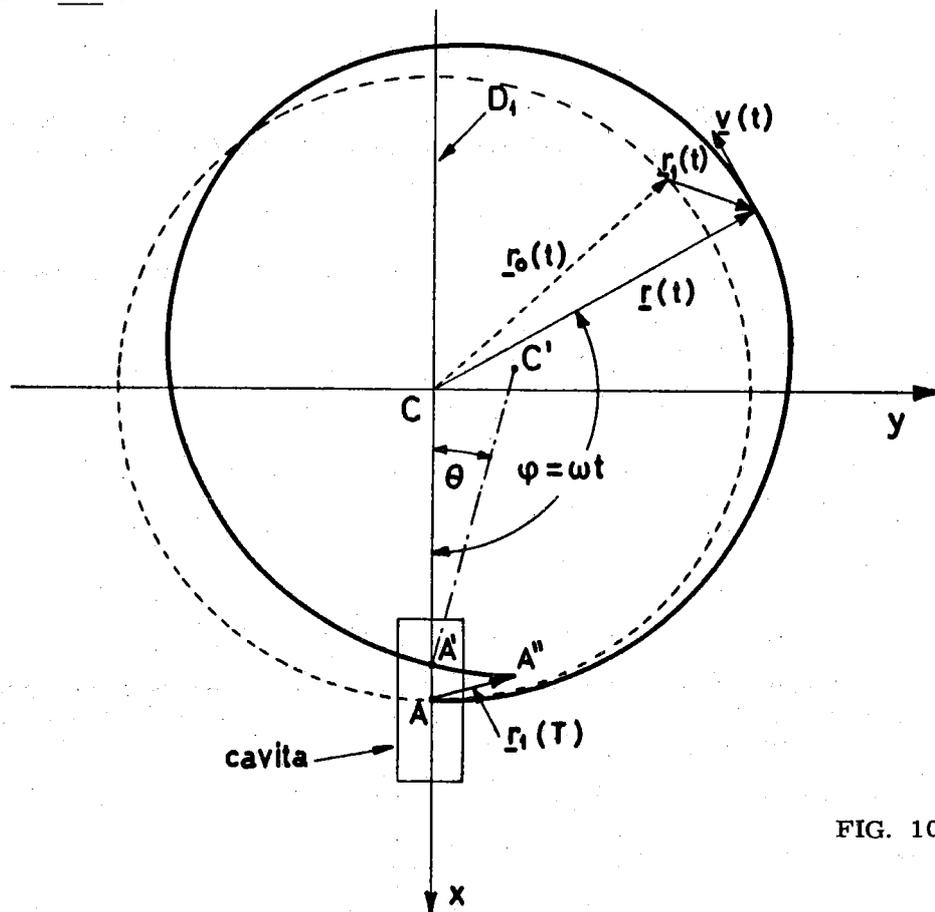


FIG. 10

Valuteremo ora ΔX e ΔY , studiando il moto dell'elettrone in un campo $\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_1$, dove \underline{B} è un campo costante e \underline{B}_1 la perturbazione da noi introdotta.

Il moto è descritto dall'equazione:

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{E \underline{v}}{c^2} \right) = q (\underline{v} \wedge \underline{B})$$

dove E è l'energia della particella e q la carica dell'elettrone.

Poichè si è supposto che il piano del moto sia sempre ortogonale all'asse z , detto $\underline{1}_z$ il versore dell'asse z , e, $h = |\underline{B}_1| / |\underline{B}_0|$ il rapporto tra $|\underline{B}_1|$ e $|\underline{B}_0|$, avremo:

$$\underline{B} = B_0 (1 + h) \underline{1}_z$$

Esplicitando la derivata nella (3.1), e, osservando che l'energia E varia praticamente solo quando si attraversa la cavità, ragion per cui la si può supporre costante lungo il resto dell'orbita, avremo:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{q c^2 B}{E} (\underline{v} \wedge \underline{1}_z) (1+h)$$

e posto $\omega = -qc^2 B/E$ (si è assunto il segno meno in modo che la frequenza degli elettroni sia positiva), segue:

$$(3.2) \quad \frac{d\underline{v}}{dt} = -\omega (\underline{v} \wedge \underline{1}_z) \cdot (1+h)$$

Poichè ad una disuniformità del campo corrisponde una variazione del raggio $\underline{r}(t)$ dell'orbita descritta, è conveniente associare al moto dell'elettrone il vettore:

$$(3.3) \quad \underline{r}_1(t) = \underline{r}(t) - \underline{r}_0(t)$$

dove $\underline{r}_0(t)$ è il raggio corrispondente al moto imperturbato (si supponrà sempre $|\underline{r}_1| \ll |\underline{r}_0|$).

Sostituendo la (3.3) nella (3.2), avremo:

$$(3.4) \quad \frac{d\underline{\dot{r}}}{dt} = -\omega (\underline{\dot{r}} \wedge \underline{1}_z) \cdot (1+h)$$

Ricordando che $\underline{\ddot{r}} = \underline{\ddot{r}}_0 + \underline{\ddot{r}}_1$ e trascurando i termini ove compaiono $\underline{\dot{r}}_1$ ed h , la (3.4) si scinde nelle due equazioni seguenti:

$$(3.5) \quad \underline{\ddot{r}}_0 = -\omega (\underline{\dot{r}}_0 \wedge \underline{1}_z)$$

$$(3.6) \quad \underline{\ddot{r}}_1 + \omega (\underline{\dot{r}}_1 \wedge \underline{1}_z) = -\omega h (\underline{\dot{r}}_0 \wedge \underline{1}_z)$$

La (3.5) è l'equazione del moto imperturbato, la (3.6) è l'equazione differenziale lineare non omogenea del I° ordine in \underline{r}_1 che descrive l'andamento nel tempo del vettore $\underline{r}_1(t)$ associato alla disomogeneità.

La (3.5) è di immediata risoluzione e si ottiene:

$$(3.7) \quad \underline{\dot{r}}_0 = -\omega (\underline{r}_0 \wedge \underline{1}_z)$$

Per integrare la (3.6) sarà usato il metodo della variazione delle costanti.

Moltiplicando vettorialmente la (3.7) per $\underline{1}_z$ si ottiene:

$$(\underline{\dot{r}}_0 \wedge \underline{1}_z) = -(\omega (\underline{r}_0 \wedge \underline{1}_z) \wedge \underline{1}_z) = -(\omega (\underline{r}_0 \times \underline{1}_z \cdot \underline{1}_z - \underline{1}_z \times \underline{1}_z \cdot \underline{r}_0)) = +(\omega (|\underline{1}_z|^2 \underline{r}_0))$$

ma $|\underline{1}_z|^2 = 1$ per cui, in fine, si ha:

$$(3.8) \quad (\underline{\dot{r}}_0 \wedge \underline{1}_z) = \omega \underline{r}_0$$

Sostituendo nella (3.6) il valore trovato per $(\underline{\dot{r}}_0 \wedge \underline{1}_z)$ si ottiene:

$$(3.9) \quad \underline{\ddot{r}}_1 + \omega (\underline{\dot{r}}_1 \wedge \underline{1}_z) = -\omega^2 h \underline{r}_0$$

L'equazione associata alla (3.9) è soddisfatta sia per $\underline{r}_1 = \underline{r}_0$, che per $\underline{r}_1 = (\underline{r}_0 \wedge \underline{1}_z)$.

Infatti, per $\underline{r}_1 = \underline{r}_0$, il primo membro dell'omogenea associata alla (3.9) diviene:

$$\underline{\ddot{r}}_0 + \omega (\underline{\dot{r}}_0 \wedge \underline{1}_z)$$

Questa espressione è nulla in virtù della (3.5).

Per $\underline{r}_1 = (\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z)$, il primo membro della equazione omogenea associata alla (3.9) diviene invece:

$$(\ddot{\underline{r}}_0 \wedge \underline{l}_z) + \omega (\dot{\underline{r}}_0 \wedge \underline{l}_z) \wedge \underline{l}_z$$

Questa espressione è nulla ancora in virtù della (3.5). Infatti, moltiplicando vettorialmente per \underline{l}_z ambo i membri della (3.5) si ha:

$$(\ddot{\underline{r}}_0 \wedge \underline{l}_z) = -\omega (\dot{\underline{r}}_0 \wedge \underline{l}_z) \wedge \underline{l}_z$$

Si può, quindi, cercare una soluzione della (3.9) che abbia la forma:

$$(3.9') \quad \underline{r}_1 = a \underline{r}_0 + b (\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z)$$

che sia, cioè una combinazione lineare di \underline{r}_0 e $(\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z)$, dove i coefficienti a e b , funzioni del tempo da determinarsi, rappresentano l'effetto della perturbazione introdotta.

Derivando rispetto al tempo la (3.9') si ha:

$$\dot{\underline{r}}_1 = a \dot{\underline{r}}_0 + \dot{a} \underline{r}_0 + \dot{b} (\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z) + b (\dot{\underline{r}}_0 \wedge \underline{l}_z)$$

e, sostituendo nella (3.9),

$$a \dot{\underline{r}}_0 + \dot{a} \underline{r}_0 + \dot{b} (\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z) + (\dot{\underline{r}}_0 \wedge \underline{l}_z) b + \omega (a \underline{r}_0 + b (\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z)) \wedge \underline{l}_z = -\omega^2 h \underline{r}_0$$

e, per la (3.7) e la (3.8)

$$a \cdot (-\omega (\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z)) + \dot{a} \underline{r}_0 + \dot{b} (\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z) + b (\omega \underline{r}_0) + a \omega (\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z) + b \omega ((\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z) \wedge \underline{l}_z) = -\omega^2 h \underline{r}_0$$

e cioè:

$$\dot{a} \underline{r}_0 + \dot{b} (\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z) = -\omega^2 h \underline{r}_0$$

Essendo $(\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z)$ un vettore ortogonale ad \underline{r}_0 , deve essere $\dot{b} = 0$ e $b = b_0$ da cui:

$$\dot{a} \underline{r}_0 = -\omega^2 h \underline{r}_0 ; \quad a = -\omega^2 \int_0^t h dt + a_0$$

l'integrale si intende calcolando lungo l'orbita imperturbata. Sostituendo nella (3.9') i valori trovati per a e b , si ha:

$$(3.10) \quad \dot{\underline{r}}_1 = -\omega^2 \underline{r}_0 \int_0^t h dt + a_0 \underline{r}_0 + b_0 (\underline{r}_0 \wedge \underline{l}_z)$$

Integrando la (3.10) tra 0 e t si ottiene la cercata espressione di $\underline{r}_1(t)$:

$$(3.11) \quad \underline{r}_1(t) - \underline{r}_1(0) = -\omega^2 \int_0^t \underline{r}_0 \left[\int_0^t h(t') dt' \right] dt + a_0 \int_0^t \underline{r}_0 dt - \frac{1}{\omega} b_0 \int_0^t \underline{r}_0 dt$$

Torniamo ora alla fig. 10: si può notare che il vettore \underline{AA}'' è proprio il vettore $\underline{r}_1(t)$ dopo un tempo T rispetto all'istante iniziale, T essendo il periodo del moto imperturbato; quindi per conoscere \underline{AA}'' basta integrare la (4.11) tra 0 e T .

$$\underline{r}_1(T) - \underline{r}_1(0) = -\omega^2 \int_0^T h(t') \left\{ \int_{t'}^T \underline{r}_0 dt \right\} dt'$$

Per la (3.8) è:

$$\int_{t'}^T \underline{r}_0(t) dt = \frac{1}{\omega} \left[\int_{t'}^T \dot{\underline{r}}_0(t) dt \wedge \underline{l}_z \right] = \frac{1}{\omega} \left[(\underline{r}_0(T) - \underline{r}_0(t')) \wedge \underline{l}_z \right]$$

sostituendo segue:

$$\begin{aligned} \underline{r}_1(T) - \underline{r}_1(0) &= -\omega^2 \int_0^T h(t') \left\{ \frac{1}{\omega} (\underline{r}_0(T) - \underline{r}_0(t')) \wedge \underline{l}_z \right\} dt' = \\ (3.11) \quad &= \omega (\underline{l}_z \wedge \underline{r}_0(T)) \int_0^T h(t') dt' - \int_0^T h(t') \dot{\underline{r}}_0 dt' \end{aligned}$$

Il vettore \underline{r}_0 ha come componenti rispettivamente:

$$\begin{aligned} r_{0x} &= r_0 \cos \psi \\ r_{0y} &= r_0 \sin \psi \quad \text{con } \psi = \omega t. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (3.11) segue:

$$\begin{aligned} (\underline{AA}'')_x &= \omega (\underline{l}_z \wedge \underline{r}_0(T))_x \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega} h(\psi) d\psi - \omega \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega} h(\psi) (-r_0 \sin \psi) d\psi \\ (\underline{AA}'')_y &= \omega (\underline{l}_z \wedge \underline{r}_0(T))_y \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega} h(\psi) d\psi - \omega \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega} h(\psi) (r_0 \cos \psi) d\psi \end{aligned}$$

Poichè il vettore $\underline{r}_0(T)$ è diretto secondo l'asse x, la componente di $(\underline{l}_z \wedge \underline{r}_0)$ secondo x, è nulla. Notando inoltre che la componente $(\underline{AA}'')_x$ coincide con la quantità, già definita, ΔX , a meno di infinitesimi del II° ordine, e che $(\underline{AA}'')_y = \Delta Y$, si ha:

$$(3.12) \quad \Delta X = r_0 \int_0^{2\pi} h(\psi) \sin \psi d\psi$$

$$(3.13) \quad \Delta Y = r_0 \int_0^{2\pi} h(\psi) (1 - \cos \psi) d\psi$$

Riassumendo avremo:

$$(3.14) \quad \underline{AA}'' = \underline{r}_1(T) - \underline{r}_1(0) = \underline{i} \Delta X + \underline{j} \Delta Y$$

Nella (3.14) ΔX rappresenta lo spostamento, dovuto alla inhomogeneità B_1 , della coordinata alla quale l'elettrone interseca la cavità. ΔY rappresenta l'avanzamento della traiettoria perturbata su quella imperturbata, cioè una variazione del percorso dello elettrone e quindi dell'orbita da esso descritta.

Prendendo ora per la funzione $h(\psi)$, il suo sviluppo in armoniche arrestato al primo ordine:

$$(3.15) \quad h(\psi) = h_0 + h_1 \sin \psi + h_2 \cos \psi$$

dove:

$$h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\psi) d\psi$$

$$h_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\psi) \sin \psi d\psi$$

$$h_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\psi) \cos \psi d\psi$$

ed esplicitando la (3.14) mediante le (3.12) e (3.13) si ha:

$$(3.14') \quad \begin{aligned} \underline{r}_1(T) - \underline{r}_1(0) = & i r_0 \left(\int_0^{2\pi} h(\psi) \sin \psi d\psi + i r_0 \left(\int_0^{2\pi} h(\psi) d\psi - \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^{2\pi} h(\psi) \cos \psi d\psi \right) \right) \end{aligned}$$

Si può concludere che:

ΔX è affetto solo dalla I^a armonica in seno dell'inomogeneità;

ΔY è affetto dalla I^a armonica in coseno e dall'armonica di ordine zero.

Lo spostamento del punto di rientro dell'elettrone in cavità causa uno slittamento dei centri delle orbite lungo il comune diametro D_1 nella direzione dell'asse x .

E' evidente che se lo spostamento è tale da essere maggiore del diametro della cavità, l'elettrone non potrà rientrarvi per la successiva accelerazione.

Per valutare l'ordine di grandezza dell'ampiezza massima dell'armonica in seno che consenta ancora il rientro in cavità procederemo nella maniera seguente:

poichè:

$$(3.16) \quad h_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\psi) \sin \psi d\psi$$

moltiplicando la (3.16) per πr_0 si ha:

$$\pi r_0 h_1 = r_0 \int_0^{2\pi} h(\psi) \sin \psi d\psi$$

cioè, per la (3.12):

$$(3.17) \quad \pi r_0 h_1 = \Delta X$$

Detto $r_{0,i}$ il raggio relativo all'^{ma} orbita imperturbata e ΔX_i lo spostamento corrispondente, l'equazione (3.17) si può porre nella forma più generale:

$$\Delta X_i = \pi h_1 r_{o,i}$$

e perciò, dopo N transiti:

$$(3.18) \quad \Delta X_{\text{tot.}} = \pi h_1 \sum_1^N i r_{o,i}$$

Ricordiamo ora che è:

$$r_{o,i} = \frac{E_i}{qc B_0}$$

$$E_i = E_0 + i \Delta \mathcal{E}_i$$

ove $\Delta \mathcal{E}_i$ è l'incremento di energia durante l'imo transito che, nel caso di un microtrone operante nel modo "fondamentale", vale: $\Delta \mathcal{E}_i = E_0$; per cui:

$$E_i = (i+1) E_0$$

cioè:

$$r_{o,i} = \frac{(i+1)E_0}{qc B_0}$$

Sostituendo l'espressione trovata per $r_{o,i}$ nella (3.18) si ottiene:

$$\Delta X_{\text{tot.}} = \pi h_1 \frac{E_0}{qc B_0} \sum_1^N i (i+1)$$

ed, eseguendo la sommatoria,

$$(3.19) \quad \Delta X_{\text{tot.}} = \pi h_1 \frac{E_0}{qc B_0} \frac{(N+3)N}{2}$$

Introducendo poi, le relazioni:

$$T_{\text{rf}} = \frac{2\pi E_0}{qc^2 B_0} \quad \text{e} \quad \lambda_{\text{rf}} = c T_{\text{rf}}$$

la (3.19) diviene:

$$(3.20) \quad \Delta X_{\text{tot.}} = \frac{\lambda_{\text{rf}} h_1}{4} (N+3)N$$

Nella approssimazione fatta si è dimostrato tra l'altro, che la lunghezza di una generica orbita i^{ma} è, nel microtrone, data dalla espressione: $2\pi r_{o,i} = (i+1) \lambda_{\text{rf}}$; nel seguito, per brevità, adotteremo direttamente quest'ultima relazione.

Se ρ è il raggio del foro della cavità, la condizione di rientro per l'ennesima orbita, si tradurrà semplicemente in:

$$(3.21) \quad \Delta X_{\text{tot.}} \leq \rho$$

e, cioè:

$$(3.22) \quad h_1 \leq \frac{4\rho}{\lambda_{\text{rf}} (N+3)N}$$

Per valutare l'ordine di grandezza di h_1 , facciamo il seguente caso:

$$\rho = 0,5 \text{ cm}; \quad N = 10; \quad \lambda_{\text{rf}} = 10 \text{ cm}$$

per cui:

$$(3.22') \quad h_1 \leq 1,5 \cdot 10^{-3}$$

Dall'esempio fatto segue, quindi, che la variazione massima consentita per il coefficiente dell'armonica in seno dello sviluppo (3.15) è dell'ordine del 1,5‰.

Dallo sviluppo in armoniche (3.15) e dalla (3.14') segue invece che, essendo l'effetto di ΔY quello di produrre uno spostamento dei centri delle orbite ortogonalmente al comune diametro D_1 , non ne sposta la quota di tangenza nella "gap", e, perciò, l'effetto dell'armonica in coseno è trascurabile, da questo punto di vista, rispetto a quello dell'armonica in seno.

D'altro canto, per effetto di un $\Delta Y \neq 0$, si ha un anticipo (o ritardo) dell'elettrone sull'istante t in cui esso attraversa la cavità rispetto all'elettrone sincrono e, perciò, un anticipo (o ritardo) di fase, rispetto alla fase sincrona, di una quantità:

$$(3.23) \quad \delta \psi_i = - \frac{\Delta Y_i}{\lambda_{rf}}$$

(Il segno meno sta a significare che si ha un anticipo di fase, se ΔY è positivo o viceversa).

Dalle (3.15) e (3.13) risulta immediatamente:

$$\Delta Y_i = 2 \pi r_{o,i} h_o - \pi r_{o,i} h_2$$

Con un procedimento analogo a quello adottato per il calcolo di ΔX_i , segue:

$$\Delta Y_i = \pi (2h_o - h_2) (i+1) \lambda_{rf}$$

poichè:

$$\delta \psi_{tot.} = \sum_1^N \delta \psi_i$$

risulta:

$$\delta \psi_{tot.} = - \pi (2h_o - h_2) \sum_1^N (i+1)$$

ed infine:

$$(3.24) \quad \delta \psi_{tot.} = - \frac{\pi}{2} (2h_o - h_2) (N+3) N$$

Si può ora ragionevolmente imporre la condizione che $\delta \psi_{tot.}$ sia minore della semiampiezza dell'intervallo definito dai confini della regione di fase stabile.

Per una valutazione numerica assumiamo il valore di questo intervallo uguale a 0,16 radianti (c.f. r. fig. 9)

Dalla (3.24) segue quindi:

$$(3.25) \quad (2h_o - h_2) \leq \frac{2 \cdot 0,16}{(N+3)N}$$

e, per $N=10$

$$(3.25') \quad (2h_o - h_2) \leq 8 \cdot 10^{-4}$$

Quest'ultima condizione è, in effetti, meno restrittiva della (3.22') trattandosi qui di una condizione sulla differenza tra i coefficienti di ordine zero e in coseno dello sviluppo (3.15).

Dalla (3.25') possiamo concludere che la variazione dovuta alla differenza tra i coefficienti dello sviluppo in armoniche, che intervengono nell'espressione del ΔY , deve essere minore dello 0,8‰.

Calcoliamo infine, per completezza lo spostamento dei centri delle orbite dovuto alle irregolarità del campo magnetico.

Sempre con riferimento alla fig. 10 è evidente che la perturbazione indotta dalla disomogeneità del campo, produce uno spostamento del centro dell'orbita perpendicolarmente al comune diametro D_1 di una quantità $ds \approx \theta r_0$.

Per valutare ds , basta osservare che l'elettrone, ritransita in cavità con una velocità $\underline{v} = i v_x + j v_y$ e che, di queste due componenti, solo v_x è incognita, essendo con buona approssimazione, $v_y = c$, all'aumentare delle orbite.

Avremo dunque, essendo

$$\theta \approx \frac{v_x}{c}$$

$$(3.26) \quad ds \approx \frac{v_x}{c} r_0$$

Alla N^{ma} orbita, chiamato θ_N il corrispondente valore di θ , sarà semplicemente:

$$(3.27) \quad (ds)_N = \theta_N r_{0,N}$$

Si tratta quindi di calcolare θ_N .

Dalla relazione:

$$\underline{v}(t) = \underline{v}_0(t) + \underline{v}_1(t)$$

e ricordando che è, per le equazioni (3.7) e (3.10),

$$\underline{v}_0 = -\omega (\underline{r}_0 \wedge \underline{1}_z)$$

e

$$\underline{v}_1 = -\omega^2 \underline{r}_0 \int_0^t h dt + a_{0-0} \underline{r}_0 + b_0 (\underline{r}_0 \wedge \underline{1}_z)$$

segue che:

$$\underline{v} = -\omega (\underline{r}_0 \wedge \underline{1}_z) - \omega^2 \underline{r}_0 \int_0^t h dt + a_{0-0} \underline{r}_0 + b_0 (\underline{r}_0 \wedge \underline{1}_z)$$

La velocità $\underline{v}(t)$ all'istante t in cui l'elettrone attraversa l'asse x , ponendo:

$$t = T + t'$$

è data da:

$$\underline{v}(T+t') = \underline{v}(T) + \dot{\underline{v}}(T)t'$$

Approssimando:

$$\dot{\underline{v}}(T) \text{ con } \dot{\underline{v}}_0(T) = -\omega^2 \underline{r}_0(T),$$

si ha:

$$\underline{v}(T+t') = -\omega(\underline{r}_0(T) \wedge \underline{1}_z) - \omega^2 \underline{r}_0(T) \int_0^T hdt + a_{00} \underline{r}_0(T) + b_0(\underline{r}_0(T) \wedge \underline{1}_z) - \omega^2 \underline{r}_0(T)t'$$

Poichè:

$$\underline{v}(0) = -\omega(\underline{r}_0(T) \wedge \underline{1}_z) + a_{00} \underline{r}_0(T) + b_0(\underline{r}_0(T) \wedge \underline{1}_z)$$

è la velocità all'istante $t=0$, sostituendo avremo:

$$\underline{v}(T+t') - \underline{v}(0) = -\omega^2 \underline{r}_0(T)t' - \omega^2 \underline{r}_0(T) \int_0^T hdt.$$

Essendo:

$$t' = -\frac{\Delta y}{v_y} \simeq -\frac{\Delta y}{c} = -\frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} h(\varphi)(1 - \cos \varphi) d\varphi$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{v}(T+t') - \underline{v}(0) = & -\omega^2 \underline{r}_0(T) \left[-\frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} h(\varphi)(1 - \cos \varphi) d\varphi \right] - \omega^2 \underline{r}_0(T) \int_0^T hdt = - \\ & -\omega^2 \underline{r}_0(T) \left\{ -\frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi + \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi \right\} \end{aligned}$$

Per la componente secondo x si ha:

$$(3.28) \quad v_x(T+t') - v_x(0) = \omega r_0(T) \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos \varphi d\varphi$$

La (3.28) rappresenta l'incremento Δv_x della velocità v_x durante una intera orbita.

Alla fine dell'orbita N^{ma} si avrà:

$$(3.29) \quad v_{x,N} = \sum_1^N i \Delta v_{x,i} + v_x(0)$$

e, per la (3.28)

$$v_{x,N} = v_x(0) + \sum_1^N i r_{0,i} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Ricordando ancora che:

$$h_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos \varphi d\varphi$$

e

$$2\pi r_{0,i} = (i+1) \lambda_{rf}$$

si ha:

$$v_{x,N} = v_{x,N}(0) + \frac{\omega \lambda_{rf}}{2} h_2 \sum_1^N i (i+1) = v_{x,N}(0) + \frac{\omega \lambda_{rf}}{4} h_2 (N+3)N$$

32.

Ricordando che $\theta_N = v_{x,N}/c$ si ottiene per θ_N , la seguente espressione:

$$(3.30) \quad \theta_N = \frac{v_x(0)}{c} + \frac{\pi}{2} h_2 (N+3)N$$

Dalla (3.27) mediante la (3.30), avremo infine la cercata espressione del $(ds)_N$:

$$(ds)_N \approx r_{o,N} \theta_N$$

e cioè:

$$(3.31) \quad (ds)_N = \frac{(N+1) \lambda_{rf}}{2 \pi c} v_x(0) + \frac{h_2 \lambda_{rf}}{4} (N+1)(N+3)N$$

CAPITOLO 4 -

INIEZIONE DEGLI ELETTRONI NEL MICROTRONE CONSIDERAZIONI INTRODUTTIVE. -

Sino ad ora si è sempre supposto che gli elettroni fossero relativistici fino dalla prima orbita: ed è solo in questa approssimazione che le equazioni, date all'inizio,

$$i) T_1 = a T_{rf}$$

$$ii) T = b T_{rf}$$

$$iii) T_k = \frac{2 \pi E_k}{q B c^2}$$

$$iiii) T_k = [a + (k-1)b] T_{rf}$$

sono da ritenersi valide per qualsiasi valore di k .

Occorre però tener presente che gli elettroni, all'inizio del ciclo di accelerazione, possono non essere relativistici, come, per esempio, nel caso di iniezione mediante estrazione a freddo.

Sorge quindi il problema di esaminare come vadano modificate le condizioni di sincronismo, affinché gli elettroni, che all'iniezione possono avere una energia qualsiasi, percorrano la prima orbita con un periodo tale da essere sincroni al secondo transito.

Il moto dell'elettrone, dal secondo transito in poi, si suppone ancora essere relativistico.

Determineremo quindi, in funzione dei parametri dell'acceleratore, quale debba essere l'incremento di energia cinetica $\Delta \mathcal{E}_1$, che bisogna comunicare all'elettrone, al primo transito in cavità, affinché esso al secondo transito sia sincrono.

Sia:

$$(4.1) \quad E_1 = E_0 + E_{in} + \Delta \mathcal{E}_1$$

l'energia totale che compete all'elettrone immediatamente dopo il primo transito ($\Delta \mathcal{E}_1$: incremento di energia cinetica che compete all'elettrone al primo transito).

Introduciamo ora i parametri c_1 e c_2 , mediante le seguenti relazioni:

$$(4.2) \quad E_{in} + \Delta \varepsilon_1 = c_1 E_0$$

$$(4.3) \quad \Delta \varepsilon_2 = c_2 E_0$$

ove $\Delta \varepsilon_2$ è l'incremento di energia cinetica comunicata nel secondo transito all'elettrone sincrono.

La (4.1), per la (4.2), diviene:

$$(4.4) \quad E_1 = (1+c_1) E_0$$

Poichè alla seconda orbita l'elettrone è supposto relativistico, per (iii) avremo che:

$$(4.5) \quad T_2 = \frac{2 \pi E_2}{q B c^2}$$

$$(4.6) \quad E_2 = E_1 + \Delta \varepsilon_2$$

e, cioè, per la (4.3) e la (4.4):

$$(4.7) \quad E_2 = (1+c_1+c_2) E_0$$

la (4.5), per la (4.7) e la (iii), diviene:

$$(4.8) \quad T_2 = \frac{2 \pi E_0}{q B c^2} (1+c_1+c_2) = (a+b) T_{rf}$$

Ricordando che:

$$(4.9) \quad \Delta T_{k,s} = \frac{2 \pi \Delta E_{k,s}}{q B c^2} = b T_{rf} \quad (k=2, 3, \dots)$$

e, $\Delta \varepsilon_{2,s} = c_2 E_0$, sostituendo nella (4.8) si ottiene:

$$(4.10) \quad \frac{1+c_1+c_2}{c_2} = \frac{a+b}{b}$$

Per un microtrone che operi nel modo fondamentale, e cioè per $a=2$ e $b=1$, si ha:

$$c_1 = 2c_2 - 1$$

ma per la (4.2) è:

$$c_1 = \frac{\Delta \varepsilon_1 + E_{in}}{E_0}$$

da cui segue:

$$(4.11) \quad (E_{in} + \Delta \varepsilon_1) = E_0 (2c_2 - 1)$$

Dalla (4.9) segue, per $k=2$:

$$c_2 = \frac{T_{rf} q B c^2}{2 \pi E_0} = \frac{\lambda_{rf} q c B}{2 \pi E_0}$$

Numericamente è:

$$(4.12) \quad c_2 = \frac{B \lambda_{rf}}{10\,679} \text{ gauss.cm.}$$

e, infine, dalla (4.11), sostituendo la (4.12)

$$(4.13) \quad (E_{in} + \Delta \mathcal{E}_1) = E_0 \left(\frac{B \lambda_{rf}}{5348} - 1 \right)$$

La (4.13) esprime quale deve essere l'energia cinetica acquistata dall'elettrone nel primo transito, per essere sincrono al secondo.

Nel caso del microtrone operante a Frascati si ha:

$$\Delta \mathcal{E}_1 = E_0 \left(\frac{10^3 \times 10,7}{5348} - 1 \right) \simeq 0,510 \text{ MeV}$$

essendo $B = 1000$ gauss; $\nu = 2800$ M.Hz; ($\lambda_{rf} = 10,7$ cm), $E_{in} = 0$

Si presenta, ora, il problema di determinare il valore $\Delta \mathcal{E}_1$ in funzione della fase di emissione φ_i degli elettroni nella cavità, in base ai parametri elettrici e geometrici della cavità stessa. Il calcolo è stato eseguito considerando il campo elettrico nella cavità e trascurando l'effetto del campo magnetico sul moto dell'elettrone.

Sia $V(t) = V_0 \sin \omega t$, la tensione applicata ai bordi della cavità, e sia "d" la profondità della "gap".

L'equazione del moto è:

$$(4.14) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{q V_0 \sin \omega t}{d}$$

ove p è la quantità di moto dell'elettrone.

Si ha quindi:

$$(4.15) \quad p(t) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \int_{t_i}^t \frac{q V_0}{d} \sin \omega t \, dt + p_i$$

con p_i quantità di moto all'ingresso in cavità all'istante t_i .

Integrando la (4.15) si ha:

$$(4.16) \quad p(\varphi, \varphi_i, p_i) = \frac{q V_0}{\omega d} (\cos \varphi_i - \cos \varphi) + p_i$$

ove $\varphi_i = \omega t_i$ e $\varphi = \omega t$.

Assegnati p_i e φ_i , l'equazione (4.16) si può risolvere numericamente per v in funzione di φ . Ciò equivale a conoscere la funzione:

$$v = f(t \mid \varphi_i, p_i)$$

Per integrazione grafica, essendo $d = \int_{t_i}^{t_u} v(t) dt$, con t_u istante di uscita dello elettrone dalla cavità, si può ricavare il valore t_u di t_u corrispondente ai valori assegnati: d, t_i, p_i .

Di conseguenza si può ricavare il valore della quantità di moto p_u all'uscita dalla cavità, mediante la relazione (4.16), fissando $t=t_u$.

Dal valore così trovato di p_u , si risale immediatamente al valore dell'energia cinetica corrispondente $\Delta \mathcal{E}_1$, in funzione di φ_i .

Notiamo, per inciso, che la quantità $\chi = \omega(t_u - t_i)$, chiamata generalmente angolo di transito, per un elettrone relativistico che attraversi un "gap" di lunghezza d è:

$$\omega(t_u - t_i) = \omega \frac{d}{c} = \frac{2\pi d}{\lambda_{rf}}$$

Questa quantità, in generale, non è trascurabile, infatti, ad esempio, per una $\lambda_{rf} = 10$ cm e $d = 1$ cm risulta $\chi = 36^\circ$.

Per elettroni non relativistici, l'angolo può assumere valori considerevolmente maggiori, come sarà mostrato in un caso concreto.

Nella fig. 11 è riportato il risultato di un calcolo eseguito per una "gap" di un centimetro di lunghezza e per un'energia di iniezione di 10 KeV e per una $\lambda_{rf} = 10,7$ cm.

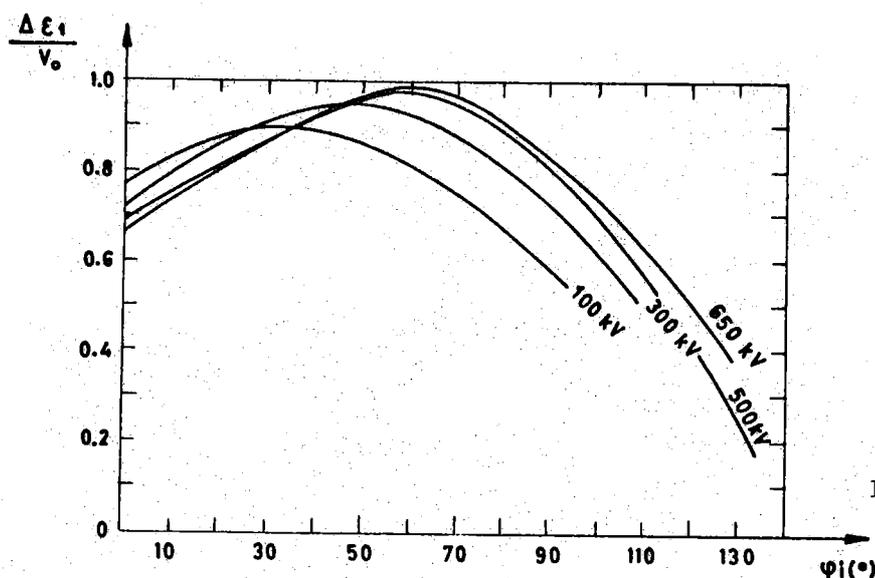


FIG. 11

Nel grafico è dato il valore $\Delta \mathcal{E}_1$ (espresso in KeV) in funzione della fase di emissione φ_i degli elettroni nella gravità, normalizzato al valore di picco della tensione applicata alla cavità (espressa in K V).

Ogni curva si riferisce a un differente valore della tensione. Se per $\Delta \mathcal{E}_1$ si usa proprio il valore dato dalla (4.13) il corrispondente φ_i è la fase di emissione dell'elettrone che diverrà sincrono al secondo transito in cavità.

Va notato, però, che ai fini di una stabile accelerazione è permesso tutto un intervallo $\Delta \varphi_i$ di fasi di emissione e, precisamente, l'intervallo i cui estremi φ_i' e φ_i'' corrispondono al secondo transito dell'elettrone in cavità, ai valori φ_1' e φ_1'' della fase già precedentemente definita, e discussa nel capitolo 2.

Per eseguire il calcolo di φ_1' e φ_1'' faremo l'ulteriore ipotesi che l'elettrone sia già relativistico dopo il primo transito in cavità. Questa ipotesi è verificata, ad esempio, per il microtrone di Frascati.

Con riferimento alla fig. 12 siano $\varphi_i = \omega t_i$ e $\varphi_u = \omega t_u$ rispettivamente i valori della fase di emissione e di uscita dell'elettrone al primo transito, φ_1 la fase al secondo transito e T il tempo di percorrenza della prima orbita misurato dall'istante t_u in cui l'elettrone lascia la cavità, dopo il primo transito, all'istante in cui l'elettrone attraversa il piano mediano della cavità al secondo transito.

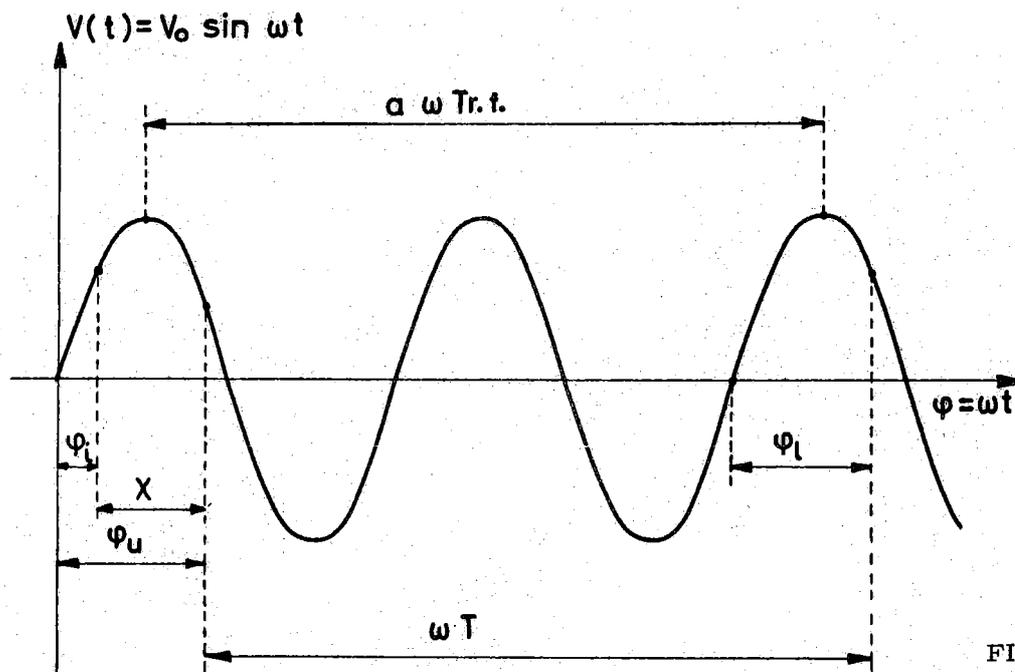


FIG. 12

Se T_1 è l'intero periodo della prima orbita, abbiamo:

$$(4.17) \quad T = T_1 - \frac{d}{2c}$$

dove d è la lunghezza della "gap".

Si ha:

$$\varphi_i + \chi + \omega T = a \omega T_{rf} + \varphi_1,$$

e per la (4.17)

$$\varphi_i + \chi + \omega T_1 - \frac{\omega d}{2c} = a \omega T_{rf} + \varphi_1$$

Essendo poi

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_{rf}} \quad \text{e} \quad \omega T_{rf} = 2\pi$$

si ha:

$$\varphi_i + \chi + \omega T_1 - \frac{2\pi d}{2\lambda_{rf}} = 2\pi a + \varphi_1$$

Ricordando che:

$$T_1 = \frac{2\pi E_1}{q c^2 B}$$

si ha ancora:

$$(4.18) \quad \varphi_i + \chi + \frac{2\pi\omega E_1}{qc^2 B} - \frac{2\pi d}{2\lambda_{rf}} = 2\pi a + \varphi_1$$

Sostituendo per E_1 l'espressione $E_1 = E_0 + E_{in} + \Delta \varepsilon_1$ e ricordando ancora che $\omega/c = 2\pi/\lambda_{rf}$ si ha:

$$\varphi_i + \chi + \frac{(2\pi)^2}{qcB\lambda_{rf}} (E_0 + E_{in} + \Delta \varepsilon_1) - \frac{2\pi d}{2\lambda_{rf}} = 2\pi a + \varphi_1$$

da cui:

$$\frac{\varphi_i + \chi}{2\pi} + \frac{2\pi E_0}{qcB\lambda_{rf}} + \frac{2\pi E_0}{qcB\lambda_{rf}} \left(\frac{E_{in} + \Delta \varepsilon_1}{E_0} \right) - \frac{d}{2\lambda_{rf}} = a + \frac{\varphi_1}{2\pi}$$

Nel caso particolare:

$$B = 1000 \text{ gauss}, \quad \lambda_{rf} = 10,7 \text{ cm}$$

($\nu = 2800$ MHz), $a = 2$ si ha:

$$\frac{2\pi E_0}{qcB\lambda_{rf}} = 1$$

per cui:

$$\frac{\varphi_i + \chi}{2\pi} + 1 + \frac{E_{in} + \Delta \varepsilon_1}{E_0} - \frac{d}{2\lambda_{rf}} = 2 + \frac{\varphi_1}{2\pi}$$

per $d = 1$ cm, si ha, infine:

$$\frac{E_{in} + \Delta \varepsilon_1}{E_0} = \left(1,047 + \frac{\varphi_1}{360} \right) - \frac{\varphi_i + \chi}{360}$$

oppure, essendo

$$\chi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$\frac{E_{in} + \Delta \varepsilon_1}{E_0} = \left(1,047 + \frac{\varphi_1}{360} \right) - \frac{\varphi_u}{360} \text{ con } \varphi_i, \varphi_1, \varphi_u \text{ espressi in gradi.}$$

Nel caso di emissione a freddo si ha, naturalmente:

$$(4.19) \quad \frac{\Delta \varepsilon_1}{E_0} = \left(1,047 + \frac{\varphi_1}{360} \right) - \frac{\varphi_u}{360}$$

Nel caso particolare $\varphi_1 = \varphi_s$, la quantità $\Delta \varepsilon_1$ assumerà il valore già stabilito in precedenza: $\Delta \varepsilon_1 = E_0$.

Si ha, perciò, dalla (4.19), la semplice relazione:

$$\varphi_u = 16,9^\circ + \varphi_s$$

Insieme all'equazione (4.19), bisogna fare uso delle relazioni che collegano tra loro, rispettivamente, le grandezze $\Delta \mathcal{E}_1$ con φ_i e $(\varphi_u - \varphi_i)$ con φ_i .

La prima è rappresentata graficamente dalla figura 11 già discussa. La seconda è rappresentata dalla figura 13. La curva, di cui alla figura 13, si ottiene tramite la semplice conoscenza della funzione $t_u = f(t_i)$ discussa brevemente a pagina 34 e, ricordando che:

$$\varphi_u = \omega t_u \quad \text{e} \quad \varphi_i = \omega t_i$$

Per la determinazione di φ_i' (o di φ_i'') si procede come segue: si fissa il valore di φ_1' (o φ_1''), noto dai calcoli del capitolo 2 e si sceglie un valore arbitrario per φ_i . In base a quest'ultimo si calcolano i valori di $\Delta \mathcal{E}_1$, ottenuti tramite la curva di figura 11, e di φ_u , che può essere estratto dalla curva di figura 13. Si sostituiscono, quindi, questi dati numerici nella (4.19), ponendo

$$\varphi_1 = \varphi_1' \quad (\text{o} \quad \varphi_1'').$$

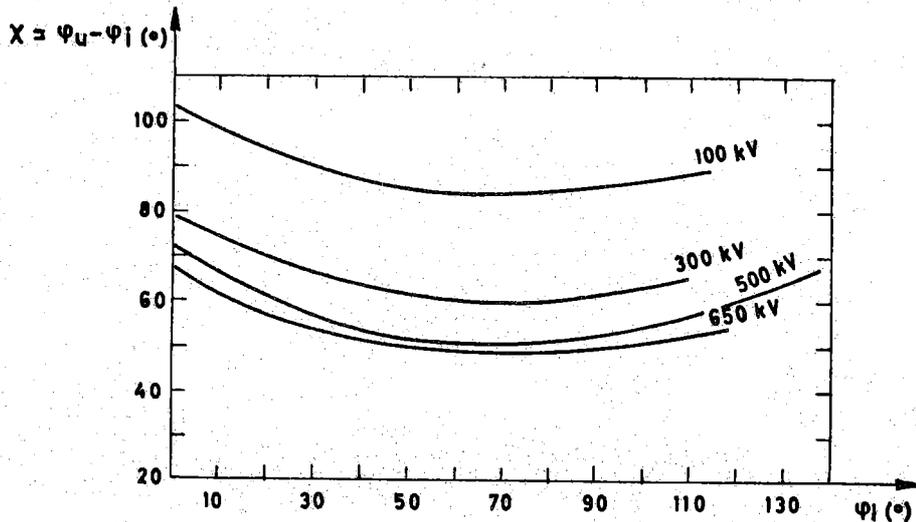


FIG. 13

Se tale relazione si riduce a una identità, significa che il valore scelto di φ_i coincide con φ_i' (o φ_i''). Se l'eguaglianza non è verificata si prende un altro valore di φ_i e, si ripete il procedimento per approssimazioni successive, fino a che l'identità è realizzata soddisfacentemente.

MODI DI INIEZIONE. -

Nei primi microtroni gli elettroni da accelerare erano ottenuti mediante estrazione a freddo dalla cavità.

La densità di corrente elettronica, è, in questo caso data dalla formula di "Fowler-Nordheim":

$$I = C E^2 e^{-\frac{D}{E}}$$

dove C e D sono costanti del materiale impiegato ed E è il campo elettrico applicato.

Nel nostro caso $E = E_0 \text{ sen } \omega t$; per cui:

$$(4.20) \quad I = I_0 \text{ sen}^2 \omega t \exp\left(-\frac{B}{\text{sen } \omega t}\right)$$

ove I_0 e B , sono nuove costanti funzioni di C , E_0 e D .

L'andamento della (4.20) è mostrato nella figura 14.

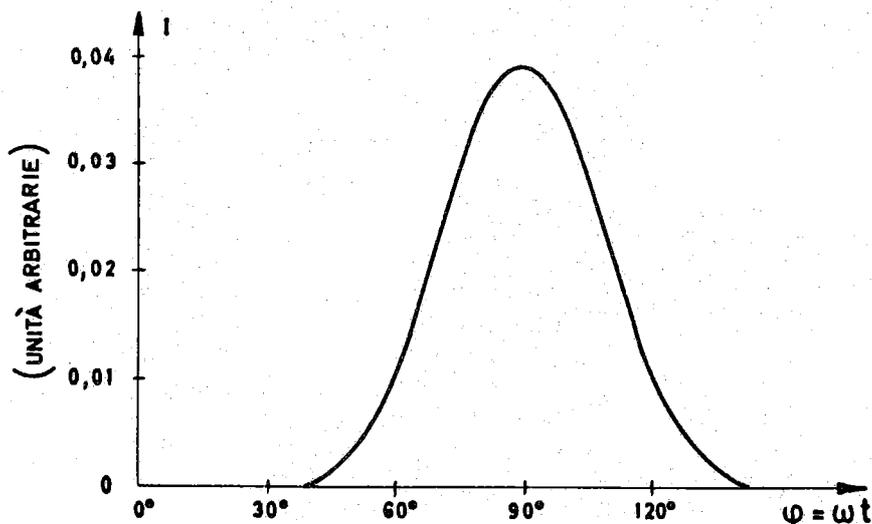


FIG. 14

L'intensità di corrente I è massima per $\omega t = (2n+1) \sqrt{\pi}/2$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

Notiamo subito che gli elettroni utili ai fini della accelerazione sono quelli emessi o, in corrispondenza dei semiperiodi positivi del campo $E(t)$, o, in corrispondenza dei semiperiodi negativi.

In genere le densità di corrente che si ottengono, applicando la formula sopra riportata nel caso dei metalli puri, sono molto basse. In figura 15 riportiamo, come esempio, un grafico della densità di corrente in funzione del campo applicato, per diversi materiali.

In pratica perciò, è necessario ricercare altri processi che esaltino l'emissione di campo, come, ad esempio, lo stato di ossidazione delle superfici o che comunque, favoriscano la generazione di elettroni, come: fotoemissione, emissione termoionica, emissione secondaria, etc.

Se si ritiene, comunque, valido un andamento della corrente di emissione del tipo rappresentato in figura 14, si può definire: "coefficiente di utilizzazione η (rendimento)" per l'iniezione, il rapporto tra l'area della curva di cui alla figura 15 compresa tra φ_i' e φ_i'' e l'area totale estesa a tutto l'intervallo: $0 + \pi$; in formula:

$$(4.21) \quad \eta = \frac{\int_{\varphi_i'}^{\varphi_i''} I(\varphi) d\varphi}{\int_0^{\pi} I(\varphi) d\varphi}$$

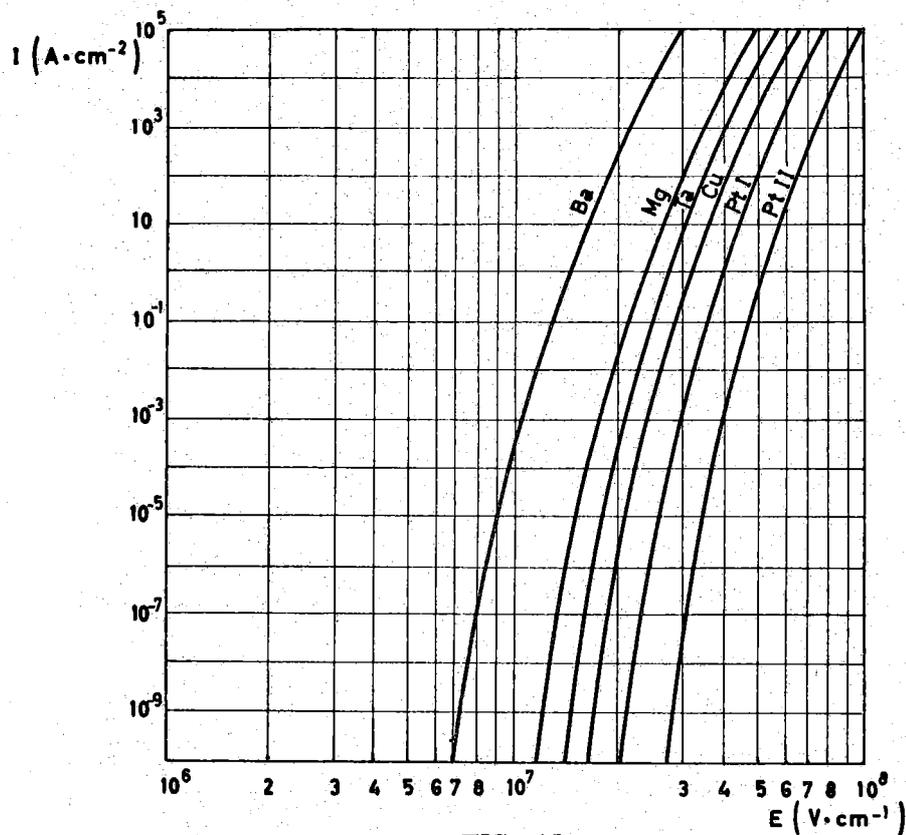


FIG. 15

Nella seguente tabella riportiamo una serie di valori del coefficiente di rendimento, sopra definito; degli angoli ψ'_i e ψ''_i calcolati seguendo il procedimento descritto a pagina 37, in base ai dati del Microtrone di Frascati e relativamente alle curve, di cui alla figura 9.

TABELLA III

Curva	V_o	ψ_s	ψ'_1	ψ''_1	$\psi_{i,s}$	ψ'_i	ψ''_i	η (%)
A	530 KV	102°50'	93°	108°	70°	82°	65°	25
B	540 "	106°50'	96°	114°	74°	86°	69°	27
C	560 "	112°40'	98°	121°	80°	90°	77°	26
D	570 "	114°50'	102°	119°	83°	90°	80°	20
E	590 "	119°	117°	121°30'	86°	90°	85°	11

Notiamo, per inciso, che il valore massimo del rendimento η si ha proprio in corrispondenza della curva B relativa a un valore di: $\psi_s = (\psi_s)_{ott.} \sim 107^\circ$.

Sperimentalmente si è potuto verificare che, in genere, solo il 10% della corrente estratta dalla cavità viene accelerata, per cui il rendimento η cala ulteriormente.

Questo risultato, porta come conseguenza che tutti i microtroni con estrazione a

freddo hanno una bassa intensità di corrente, con un fascio in uscita dell'ordine del mi croampère.

Allo scopo di aumentare l'intensità di corrente, sono stati progettati e realizzati i seguenti altri metodi di iniezione, che passiamo, ora, brevemente a descrivere.

Essi sono:

- I° - Iniezione mediante catodo in cavità
- II° - " con un fascio di elettroni
- III° - " a due cavità
- IV° - " alla Kapitza.

Il primo metodo è stato realizzato e descritto da Reich. In questo caso si è usato un catodo filiforme del diametro di 0,4 mm, situato verticalmente nel punto K (v. figura 16 aeb).

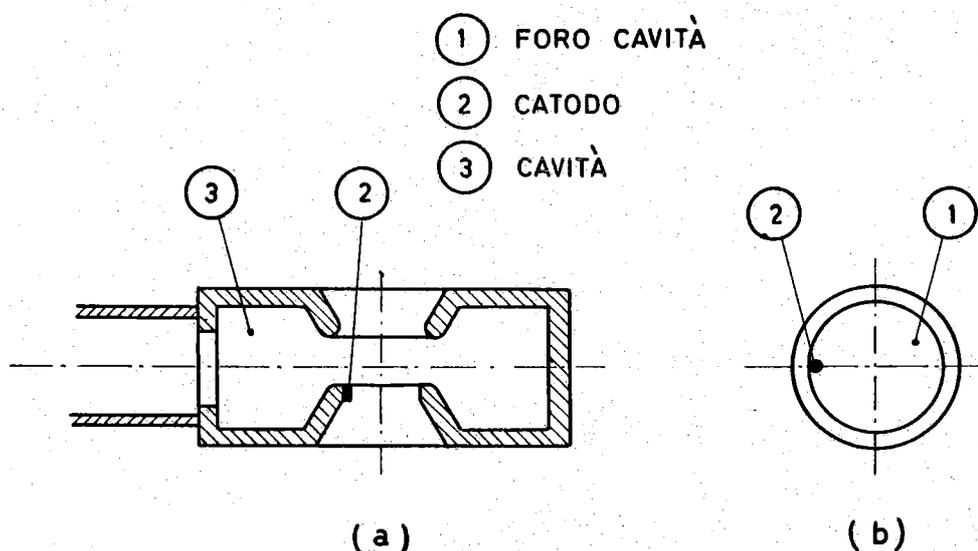


FIG. 16

L'intensità di corrente misurata alla 3° orbita, risultava $500 \mu\text{a}$ per impulso.

La forma della cavità era toroidale con i coni di profondità diversa, per consentire l'emissione, il più possibile nel centro della cavità. Il secondo metodo è stato adottato nel microtrone svedese di Lund, sfruttando il fascio di un cannoncino elettronico posto immediatamente vicino alla cavità. Per meglio sistemare la sorgente di elettroni è stata modificata la forma della cavità, che è ora asimmetrica, come risulta dalla fig. 17.

Al cannoncino elettronico con filamento di tungsteno, è applicata una tensione negativa pulsata di 75 KV, indipendente dalla tensione applicata alla cavità. La corrente emessa, misurata alla decima orbita è di circa 20 ma. Il terzo metodo, consiste nello adoperare una seconda cavità che lavori alla medesima frequenza della cavità principale del microtrone (v. fig. 18). La sorgente di elettroni può essere, o, un catodo K, posto esternamente alla cavità, o, la cavità (I) stessa ove, però l'emissione a freddo è esaltata da uno speciale dispositivo nella superficie interna delle pareti metalliche, consistente in un sottile deposito di Aquadag in prossimità dei bordi del foro della cavità.

Se nel sistema di alimentazione per l'iniezione mediante estrazione a freddo nella I° cavità, si introduce un dispositivo di "phase shifter", si può selezionare lo spostamento di fase tra le oscillazioni nell'iniettore e la cavità (II), in modo da realizzare

un'iniezione di corrente in fase stabile nella cavità principale; è stato calcolato che il coefficiente di cattura può raggiungere in tal caso, il 70% e l'intensità di corrente dopo il primo transito, per una $\lambda = 3$ cm, è di 0,3 amp. per impulso, e, per $\lambda = 10$ cm, è di 0,9 amp. per impulso. Fino ad oggi una realizzazione pratica di cavità iniettante è stata fatta una sola volta. Ambedue le cavità erano alimentate dallo stesso magnetron.

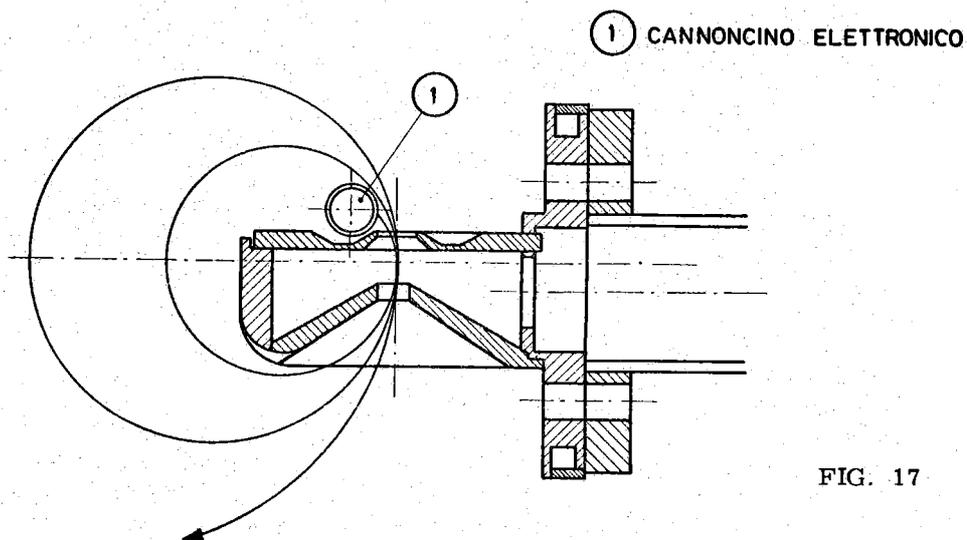


FIG. 17

① RISUONATORE DI INIEZIONE

② RISUONATORE PRINCIPALE

③ CATODO CALDO

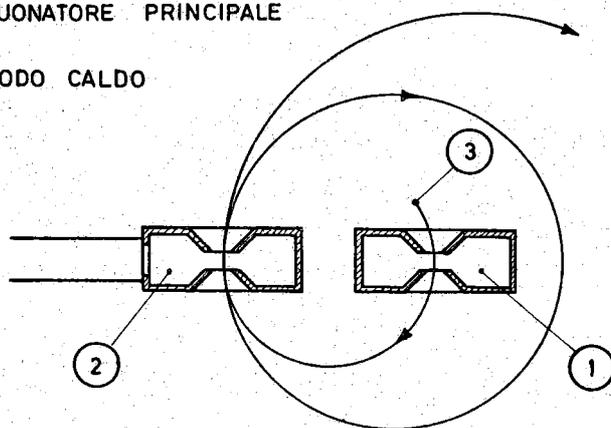


FIG. 18

Nel quarto modo, noto come iniezione alla Kapitza, la maggiore novità è costituita dalla forma della cavità, che è cilindrica invece che toroidale (v. fig. 19).

Il catodo è ora situato all'interno della cavità stessa a una distanza $R_k = 1,75$ cm dall'asse della cavità. Il valore di R_k è stato calcolato con l'ausilio di una calcolatrice (vedasi appendice). Il catodo era costituito da un cubetto di boruro di lantanio ($L_a B_6$) con una superficie raggiunte di 2 mm^2 , riscaldato a 1600°C mediante un filamento di tantalio. La densità di corrente di emissione per un campo in cavità di 350 KV/cm , era di 200 amp/cm^2 . La cavità usata aveva un diametro $2R = 7,66$ cm, e una lunghezza $L = 1,63$ cm. Le prove sono state fatte su un microtrone avente poli di 70 cm di diametro

e l'altezza della camera a vuoto, da essi racchiusa, era di 11 cm.

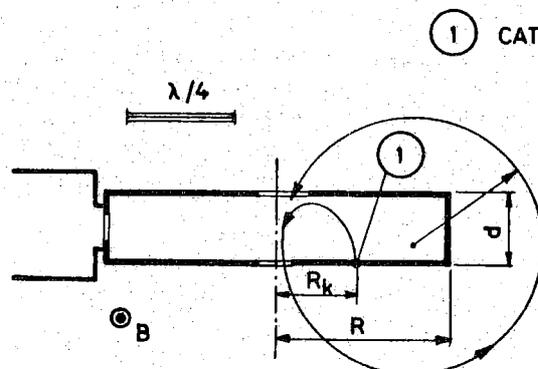


FIG. 19

L'intensità di corrente misurata alla 12^{ma} orbita era di 15 mA con una energia di 7 MeV. Il modo di funzionamento era quello fondamentale.

Come si è visto nel Capitolo 1, uno dei maggiori inconvenienti del microtrone è il basso valore del campo magnetico che si ottiene in corrispondenza a valori prefissati dei parametri a e b e quindi il basso valore dell'energia massima ottenibile con un magnete di dimensioni ragionevoli; nè alcuno dei metodi precedentemente descritti permette di aumentare il campo magnetico guida e quindi l'energia degli elettroni, senza far variare il raggio dell'orbita da essi descritta.

Per ottenere un miglioramento in questo senso, è stato progettato, sempre dal gruppo Kapitza, un diverso sistema di traiettorie elettroniche all'interno della cavità cilindrica.

Esaminando la fig. 20, si vede che il catodo è stato messo molto vicino all'asse della cavità, ed, il fascio di elettroni, prima di lasciare la cavità, passa attraverso un foro ausiliario A; situato nel piano dell'orbita, dalla stessa parte del catodo K.

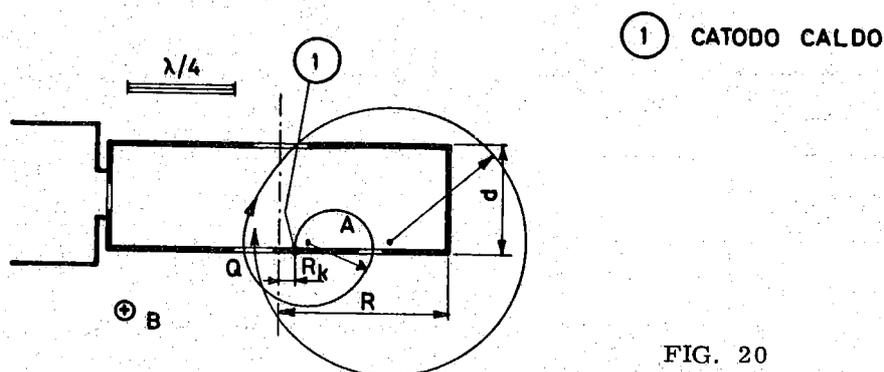


FIG. 20

In questo modo un elettrone emesso dal catodo K (v. fig. 20) con una energia E_i , per azione del campo magnetico, compie una semiorbita di raggio r , prima di uscire dalla cavità attraverso il foro ausiliario A. Il campo magnetico alternato, crea all'interno della cavità un campo elettrico non conservativo, secondo la legge $\text{rot} \underline{E} = - \partial B / \partial t$, per effetto del quale, durante il tragitto in cavità, l'elettrone acquista una energia cinetica E' , che si somma all'energia di iniezione E_i , e la cui espressione è:

44.

$$(4.22) \quad E' = -q \oint \underline{E} \times \underline{dl} = -q \int_S \text{rot} \underline{E} \times \underline{nds} = q \frac{\partial}{\partial t} \oint (B) = q \mathcal{K} \frac{r^2}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

Intendendo come orbita completa il percorso compiuto dall'elettrone dal punto Q al punto Q, e, comprendente un solo transito in cavità: si vede (v. fig. 20), che per la traiettoria realizzata nel II° tipo di iniezione alla Kapitza, la prima orbita è più lunga dell'orbita, come da noi definita, di un arco $\widehat{KA} + \widehat{AQ}$, durante il quale l'elettrone acquista una energia uguale alla somma della energia con cui è stato emesso E_i , e dell'energia comunicatagli dalla radiofrequenza, E' .

Alla fine della prima orbita l'elettrone avrà una energia totale:

$$(4.23) \quad E_1 = E_0 + E_i + E' + \Delta \mathcal{E}$$

Perciò è come se l'energia di iniezione venga incrementata di una quantità E' .

Dalla equazione:

$$(4.24) \quad q c R_k = \frac{E_k}{B}$$

si vede che è possibile determinare in infiniti modi il valore dell'energia e del campo magnetico, pur mantenendo costante il loro rapporto.

Il problema consiste nell'armonizzare i valori dei parametri del microtrone in modo tale che a parità di raggio, si abbia una energia maggiore e quindi dalla (4.23), per verificare la (4.24), è necessario aumentare il campo magnetico guida.

Dall'esame della tabella IV, dove nella riga superiore sono riportati i valori dei parametri relativi al I° tipo di iniezione alla Kapitza, e, nella inferiore i valori relativi al II° tipo, si vede che sono rimasti invariati, il raggio R della cavità, il modo di operare scelto per l'acceleratore, che è sempre quella fondamentale e la lunghezza d'onda; mentre, il valore del campo magnetico guida, la lunghezza della "gap" della cavità, e, la tensione applicata, sono quasi raddoppiati.

TABELLA IV

Modo	R cavità	d "gap"	R_k , catodo	Tensione	λ_{rf}	Campo magnetico
a = 2 b = 1	3,83 cm	1,67 cm	1,75 cm	640 KV	10 cm	1180 gauss
a = 2 b = 1	3,83 cm	2,31 cm	0,32 cm	10^3 KV	10 cm	1940 gauss

Tenendo presente quanto detto, riassumendo avremo: nel I° tipo di iniezione, essendo:

$$E_1 = 2 \div 2,4 \text{ volte } E_0$$

sarà:

$$\Delta \mathcal{E} = 1 \div 1,2 \text{ volte } E_0$$

$$B = 1 \div 1,2 \text{ volte } B_c$$

Nel II° tipo di iniezione, essendo:

$$E_1 = 3,6 + 4,4 \text{ volte } E_0$$

sarà:

$$\Delta \mathcal{E} = 1,8 + 2,2 \text{ volte } E_0$$

$$B = 1,8 + 2,2 \text{ volte } B_c$$

dove: $B_c = 2 \mathcal{T} E_0 / q \lambda_{rf} = 1070$ gauss, è il campo magnetico di ciclotrone, già definito;

E_1 , è l'energia totale che compete all'elettrone alla fine della prima orbita;

$\Delta \mathcal{E}$, è l'incremento costante di energia per transito acquistato dall'elettrone.

Riportiamo, per confronto, i valori degli stessi parametri, nel caso di iniezione mediante estrazione a freddo:

$$B = 1 + 1,2 \text{ volte } B_c$$

$$E_1 = 2 \text{ volte } E_0$$

$$\Delta \mathcal{E} = E_0$$

Un microtrone con cavità cilindrica offre, rispetto agli altri tipi di cavità realizzati, i seguenti vantaggi: è più compatto, consente una maggiore possibilità di modi di funzionamento, la costruzione della cavità stessa è molto più semplice e la lunghezza della medesima si può fare maggiore che nelle cavità toroidali, (fino ad alcuni centimetri). Tutti i parametri relativi al moto dell'elettrone in cavità sono direttamente calcolabili, (vedi appendice "Studio del moto di un elettrone nel campo elettromagnetico all'interno di una cavità cilindrica").

CAPITOLO 5 -

APPLICAZIONE DEL CRITERIO DI FOCHEGGIAMENTO ALLA THOMAS NEL CASO DEL MICROTRONE. -

In questo capitolo sarà proposta una modifica per realizzare un microtrone con possibilità di focheggiamento mediante l'uso di un magnete settoriato. Tale modifica consiste nella sostituzione del campo magnetico-guida a gradiente nullo con un campo a gradiente alternato, ottenuto mediante introduzione di settori magnetici focheggianti.

In tale maniera, è possibile realizzare un regime di accelerazione nel quale si ha stabilità per le oscillazioni assiali e radiali di betatrone risultanti. Lo strumento matematico per il calcolo della stabilità di dette oscillazioni è il metodo delle matrici.

Per oscillazione di betatrone s'intende il moto oscillatorio attorno all'orbita ideale imperturbata, chiusa su se stessa e giacente nel piano mediano dell'acceleratore, descritta da una particella sincrona.

Per oscillazioni radiali (od orizzontali) s'intendono quelle oscillazioni che avvengono nel piano mediano orizzontale (x - y); per oscillazioni verticali (o assiali) quelle che avvengono parallelamente all'asse secondo il quale è diretta il campo magnetico: nel nostro caso, l'asse z.

Definiremo indice di campo la grandezza:

$$n = - \frac{dB/B}{dr/r} = - \frac{dB}{dr} \cdot \frac{r}{B}$$

il segno - è una convenzione affinché sia maggiore di 0 l'indice per un campo il quale decresca all'aumentare del raggio.

Qualitativamente si può dire che si ha stabilità assiale se:

$$0 < n < +\infty$$

stabilità radiale se:

$$-\infty < n < +1$$

stabilità in entrambe le direzioni se:

$$0 < n < +1$$

Il campo non deve essere uniforme, deve cioè, decrescere radialmente, ma non più rapidamente del rapporto B/R .

Per un'analisi quantitativa della stabilità orbitale faremo le seguenti ipotesi:

1°) Si supponrà che le particelle viaggino sempre con velocità costante; proprietà già vera per gli elettroni a bassa energia.

2°) Si trascurano sia il processo che il risultato della accelerazione essendo il problema attuale non tanto di stabilire perchè avviene il moto e come, quanto di vedere se l'orbita descritta è dinamicamente stabile.

3°) Si tratteranno separatamente il moto assiale e radiale di betatrone: ipotesi valida nel caso di oscillazioni di piccola ampiezza.

Le equazioni differenziali che descrivono le piccole oscillazioni assiali e radiali di betatrone sono le equazioni di Kerst-Serber:

$$(5.1) \quad \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{n z}{\rho^2} = 0$$

$$(5.2) \quad \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{(1-n)x}{\rho^2} = 0$$

La (5.1) è l'equazione per il moto assiale e la (5.2) per il moto radiale; z e x sono lo spostamento dall'orbita di equilibrio assiale e radiale rispettivamente. Il sistema di coordinate scelto è un sistema di ascisse curvilinee:

$$x = x(s); \quad y = y(s); \quad z = z(s)$$

ove $ds = R \omega dt$ con R raggio di curvatura dell'orbita imperturbata.

ρ è il raggio di curvatura dell'orbita perturbata.

Le soluzioni z e dz/ds , x e dx/ds delle equazioni (5.1) e (5.2) che forniscono lo spostamento assiale e radiale e l'inclinazione dell'orbita, possono esprimersi sinteticamente mediante un vettore:

$$(5.3) \quad Z_i = \begin{vmatrix} z_i \\ (\frac{dz}{ds})_i \end{vmatrix} \quad e \quad X_i = \begin{vmatrix} x_i \\ (\frac{dx}{ds})_i \end{vmatrix}$$

ove l'indice i si riferisce al particolare settore attraversato. L'azione di ciascun elemento dell'acceleratore è espressa dal prodotto 2×2 delle matrici di trasferimento applicate ai vettori Z_i e X_i .

CALCOLO DELLA MATRICE DI TRASFERIMENTO. -

La soluzione generale dell'equazione (5.1) è del tipo:

$$(5.4) \quad Z = A \cos \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} ds + B \operatorname{sen} \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} ds$$

con A e B costanti.

L'inclinazione dell'orbita è data da:

$$(5.5) \quad \frac{dz}{ds} = - \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} ds + \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} B \cos \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} ds$$

Se con l'indice 1 intendiamo la regione dello spigolo del magnete ove la particella inizia il suo tragitto nel sistema foceggiante, avremo che a questo punto $s = s_1 = 0$ e le equazioni (5.4) e (5.5) danno le condizioni iniziali

$$(5.6) \quad z = z_1; \quad e \quad \left(\frac{dz}{ds}\right) = \left(\frac{dz}{ds}\right)_1$$

Le (5.6) danno per le costanti A e B:

$$(5.7) \quad A = z_1; \quad B = \rho \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \cdot \frac{1}{n \frac{1}{2}}$$

Se m è la lunghezza del percorso compiuto dalla particella entro il settore magnetico, misurata lungo l'orbita di equilibrio, alla fine del settore dove $s = s_2 = m$, la posizione della particella e l'inclinazione dell'orbita sono date rispettivamente da:

$$(5.8) \quad z_2 = z_1 \cos \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} m + \frac{\rho}{n \frac{1}{2}} \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \operatorname{sen} \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} m$$

$$(5.9) \quad \left(\frac{dz}{ds}\right)_2 = - \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} z_1 \operatorname{sen} \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} m + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \cos \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} m$$

le (5.8) e (5.9) si possono esprimere col formalismo delle matrici nella seguente maniera:

$$(5.10) \quad \begin{vmatrix} z_2 \\ \left(\frac{dz}{ds}\right)_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} m & \frac{\rho}{n \frac{1}{2}} \operatorname{sen} \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} m \\ - \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} m & \cos \frac{n}{\rho} \frac{1}{2} m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \end{vmatrix}$$

La matrice:

$$(5.11) \quad \begin{vmatrix} \cos n \frac{1}{2} \theta & \frac{\rho}{n \frac{1}{2}} \operatorname{sen} n \frac{1}{2} \theta \\ -\frac{n}{\rho} \operatorname{sen} n \frac{1}{2} \theta & \cos n \frac{1}{2} \theta \end{vmatrix} \quad \text{con } \theta = \frac{m}{\rho}$$

è detta matrice di trasferimento per il moto verticale e si indica con M_V ; simbolicamente:

$$M_V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Analogamente, dalle (5.2), si ricava la matrice di trasferimento per il moto radiale: M_R , che ha la seguente espressione:

$$(5.12) \quad M_R = \begin{vmatrix} \cos (1-n) \frac{1}{2} \theta & \rho (1-n) \frac{1}{2} \operatorname{sen} (1-n) \frac{1}{2} \theta \\ -\frac{(1-n)}{\rho} \operatorname{sen} (1-n) \frac{1}{2} \theta & \cos (1-n) \frac{1}{2} \theta \end{vmatrix}$$

Anche qui, con analogo simbolismo, si indicherà la matrice M_R con:

$$M_R = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Con riferimento alla fig. 21 che rappresenta, schematicamente, un microtrone a due settori, si vede che, quando la particella esce dal primo settore incontra una regione detta "regione diritta" ove non esiste campo magnetico. L'effetto di tale regione si ripercuote unicamente su una variazione dello spostamento (z o x) che aumenta proporzionalmente al percorso, ma non altera minimamente l'inclinazione. Si può esprimere quest'effetto mediante una matrice del tipo:

$$(5.13) \quad \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ove s è la "lunghezza azimutale" della "sezione diritta".

La (5.13) insieme alle (5.11) e (5.12) dà, in forma di matrici, le seguenti espressioni:

$$(5.14) \quad \begin{vmatrix} z_3 \\ (\frac{dz}{ds})_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ (\frac{dz}{ds})_1 \end{vmatrix}$$

$$(5.15) \quad \begin{vmatrix} x_3 \\ (\frac{dx}{ds})_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ (\frac{dx}{ds})_1 \end{vmatrix}$$

ove con l'indice 3 ci si riferisce al termine della "sezione diritta".

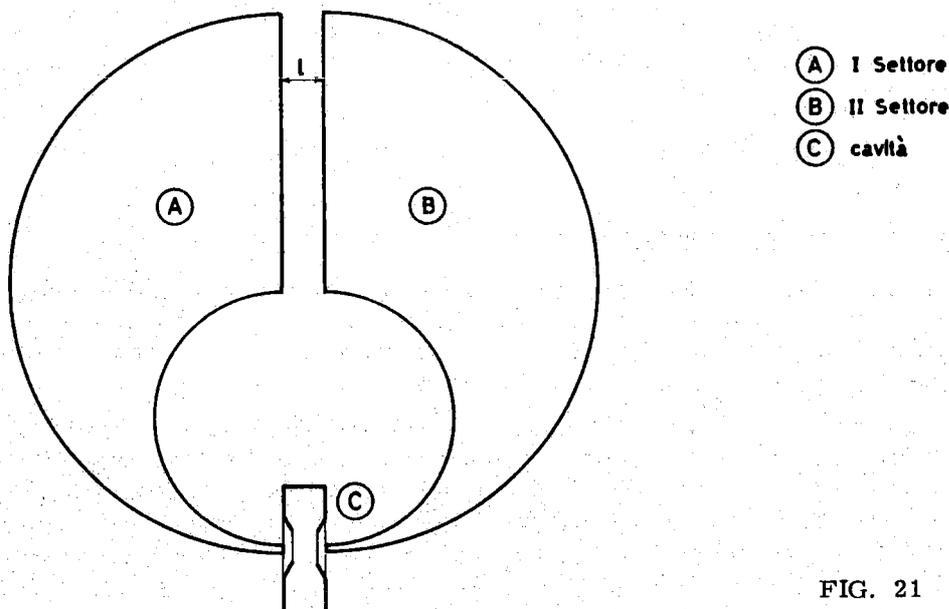


FIG. 21

Ricerchiamo, ora, le condizioni di stabilità del moto perturbato. Le oscillazioni radiali ed assiali descritte dalle equazioni (5.1) e (5.2) hanno in generale espressioni del tipo:

$$(5.16) \quad \begin{aligned} x_N &= A_x \cos(\theta + N \sigma_x) \\ z_N &= A_z \cos(\theta + N \sigma_z) \end{aligned}$$

ove N è il numero dei settori attraversati.

Le quantità σ_z e σ_x rappresentano il cambiamento di fase delle oscillazioni di betatrone per settore. Quindi $N \sigma_z$ e $N \sigma_x$ saranno, rispettivamente, lo spostamento totale di fase dovuto all'intero percorso magnetico costituito dagli N settori.

La frequenza delle oscillazioni sarà data, perciò da:

$$\nu_z = \frac{N \sigma_z}{2\pi} \quad \nu_x = \frac{N \sigma_x}{2\pi}$$

σ_x e σ_z sono legate alle tracce delle matrici M_R e M_V dalle relazioni:

$$\cos \sigma_x = \frac{1}{2} \text{Tr } M_R = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22})$$

$$\cos \sigma_z = \frac{1}{2} \text{Tr } M_V = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22})$$

La relazione che fornisce il criterio di stabilità assiale e verticale è dato dalle disuguaglianze:

$$-1 < \cos \sigma_z < +1$$

$$-1 < \cos \sigma_x < +1$$

e cioè semplicemente:

$$-2 < \text{Tr } M_R < +2$$

(5.17)

$$-2 < \text{Tr } M_V < +2$$

INTRODUZIONE DEI CRITERI DI FOCHEGGIAMENTO DI BORDO (Edge Focusing).

Sinora abbiamo esaminato l'influenza di un settore magnetico foccheggiante e di una "sezione dritta" sul percorso della particella; occorre, però, osservare che anche la sagoma e l'inclinazione degli spigoli del settore magnetico influiscono, foccheggiando sia assialmente che radialmente, sulle traiettorie delle particelle.

Come è noto, ai bordi di un magnete il campo non cade bruscamente, ma le linee di forza s'incurvano verso l'esterno formando il cosiddetto "flusso disperso" (fringing field). L'azione del flusso disperso si può sfruttare, ai fini del foccheggiamento, sagomando opportunamente i bordi di ciascun settore magnetico. Per esempio, se i capi del magnete sono tagliati in maniera tale che le due facce terminali non solo siano verticali ma anche normali all'orbita di equilibrio nella "sezione dritta", allora le linee di forza del "flusso disperso", non hanno componente radiale. Se, invece, i capi del magnete fossero tagliati con le facce ancora verticali ma ruotate in modo tale da non essere più perpendicolari all'orbita di equilibrio nella "sezione dritta" allora il "fringing field" ha una componente radiale che può essere diretta verso l'esterno o verso l'interno.

In fig. 22 sono mostrati tre modi diversi di sagomare le facce del magnete che si suppone visto dall'alto. I tre casi (a) (b) e (c) corrispondono ciascuno ad una diversa posizione rispetto alla traiettoria nella "sezione dritta".

Detto δ l'angolo formato dalla normale \underline{n} allo spigolo e dalla tangente alla traiettoria nel punto in cui essa incontra le facce del magnete, si può stabilire il seguente criterio:

1) Se la normale \underline{n} giace esternamente al percorso della particella l'effetto dello spigolo del magnete è foccheggiante in senso verticale e defoccheggiante in senso radiale, in tal caso assumeremo: $\delta > 0$ (v. fig. 22a).

2) Se la normale \underline{n} giace internamente al percorso della particella l'effetto dello spigolo è foccheggiante radialmente e defoccheggiante assialmente (v. fig. 22c), in tal caso assu-

meremo: $\delta < 0$.

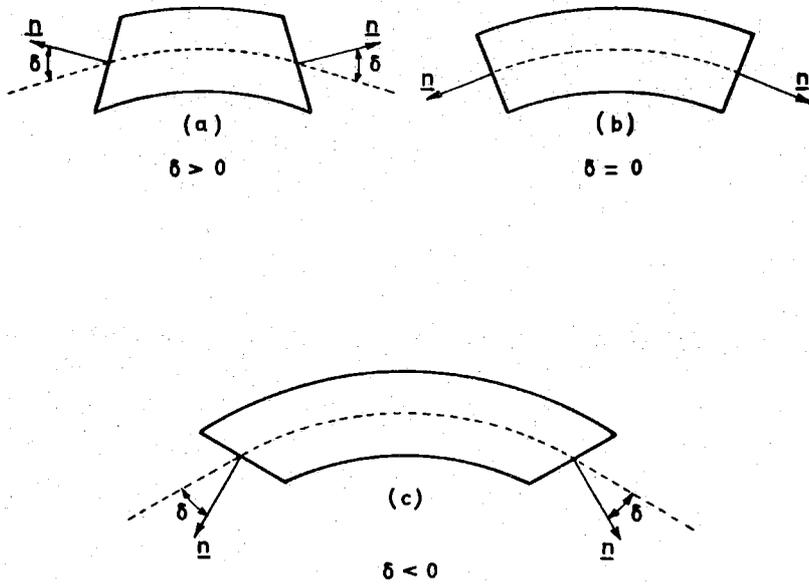


FIG. 22

Diamo ora una valutazione approssimata dello spostamento, sia assiale che radiale, indotto dall'azione foccheggiante dello spigolo:

a) - Spostamento assiale. -

Consideriamo un magnete per cui sia $\delta > 0$ in modo che la particella sia focalizzata assialmente.

Nella fig. 23a e nella fig. 23b sono rappresentate le componenti del flusso disperso nel caso di un magnete a spigolo inclinato con δ positivo. La fig. 23a rappresenta una sezione verticale del settore visto dal centro della macchina. La fig. 23b è una vista dall'alto dello stesso settore. In questa figura è rappresentato l'andamento del campo magnetico a una quota $z > 0$.

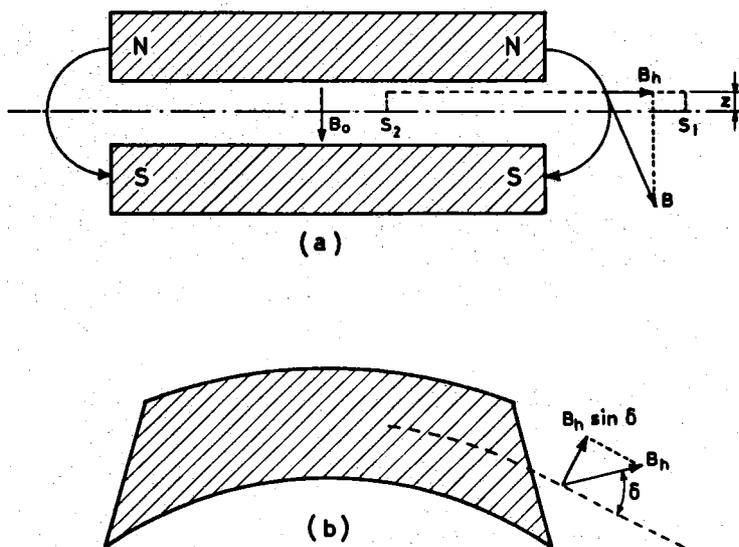


FIG. 23

Per effetto della componente radiale $B_h \sin \delta$ dello B_h (componente orizzontale del flusso disperso), la particella è soggetta ad una forza:

$$F_z = q v B_h \sin \delta$$

che tende a portarla verso il piano mediano; si ha, dunque:

$$(5.18) \quad \frac{dv_z}{ds} = - \frac{q}{M} B_h \sin \delta$$

con
$$\frac{dv_z}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d^2 z}{dt^2} \quad \text{e } M \text{ massa della particella.}$$

Integrando la (5.18) tra un punto S_1 lontano dal magnete, ove non vi sia l'effetto del flusso disperso, e un punto S_2 interno al magnete, dove il campo è dato dalla sola componente assiale B_0 , avremo, con riferimento alla fig. 23a:

$$\begin{aligned} \int_{S_1}^{S_2} dv_z &= - \frac{q}{M} \int_{S_1}^{S_2} B_h \operatorname{tg} \delta \cos \delta \, ds = - \frac{q}{M} \operatorname{tg} \delta \int_{S_1}^{S_2} B_h \cos \delta \, ds = \\ &= - \frac{q}{M} \operatorname{tg} \delta \int_{S_1}^{S_2} B_h x \, ds. \end{aligned}$$

Essendo $M v = q B \varrho$ avremo, introducendo il raggio di curvatura del magnete ϱ :

$$(5.19) \quad \left(\frac{dz}{ds}\right)_{S_2} - \left(\frac{dz}{ds}\right)_{S_1} = - \frac{q}{M v} B_0 z \operatorname{tg} \delta = - \frac{z}{\varrho} \operatorname{tg} \delta$$

La (5.19) rappresenta la variazione dell'inclinazione verticale dell'orbita nell'attraversare la "regione di flusso disperso". Il segno meno nella (5.19) significa che si ha foccheggiamento assiale per $\delta > 0$.

b) - Spostamento radiale. -

Sia ancora $\delta > 0$. Consideriamo le traiettorie A e B di due particelle che viaggiano ad una distanza x l'una dall'altra. Con riferimento alla fig. 24 si vede che all'istante in cui la particella sulla traiettoria B raggiunge lo spigolo, la particella sulla traiettoria A è penetrata di un tratto: $d = x \operatorname{tg} \delta$ e pertanto deflessa di un angolo

$$(5.20) \quad \Phi = (x/\varrho) \operatorname{tg} \delta$$

La (5.20) rappresenta la deflessione indotta da uno spigolo inclinato rispetto alla orbita.

Introduciamo, ora, la matrice che tiene conto degli effetti di bordo di un settore magnetico, mediante le considerazioni che seguono.

Quando una particella attraversa la "regione di flusso disperso" quest'ultima si comporta approssimativamente come una lente sottile, per cui lo spostamento (generico) y (verticale o radiale) rimane inalterato. Ne consegue che $y = y_1$. (∞)

La inclinazione $y = (dv/ds)$ della traiettoria viene alterata di una quantità proporzionale allo spostamento y . Se, sempre mantenendo l'analogia ottica, indicati con Φ_z e z rispettivamente l'angolo di deflessione e lo spostamento verticale, e con Φ_x

e x l'angolo e lo spostamento radiale, definiamo "potere diottrico" dello spigolo del magnete, la quantità $1/f$; avremo:

$$\Phi_z = \frac{z}{f_z} \quad \text{e} \quad \Phi_x = \frac{x}{f_x}$$

dove:

$$(5.21) \quad f_z = - \frac{\rho}{\text{tg } \delta} \quad (\text{il segno - indica che si ha foccheggiamento verticale per } \delta > 0)$$

$$\text{e} \quad f_x = + \frac{\rho}{\text{tg } \delta} \quad (\text{il segno + indica che si ha defoccheggiamento radiale per } \delta > 0)$$

ρ è il raggio di curvatura locale.

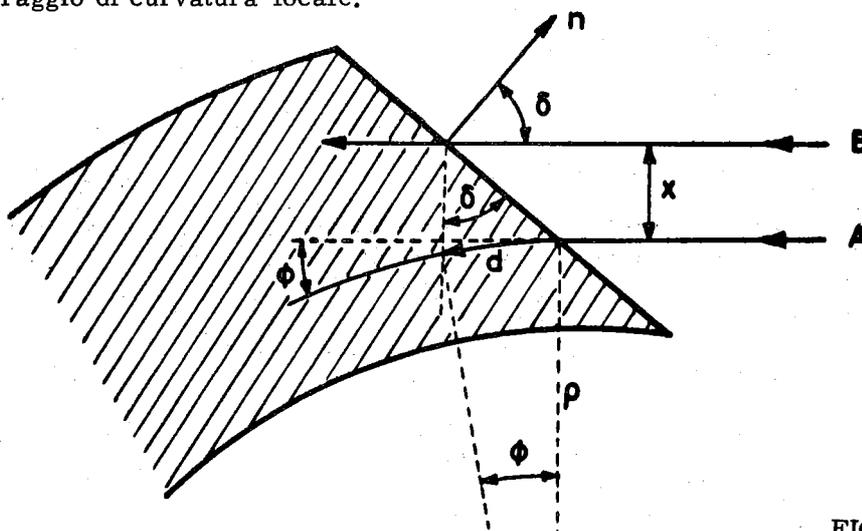


FIG. 24

Pertanto se la inclinazione delle traiettorie all'ingresso della lente magnetica era y'_1 il suo valore, all'uscita sarà cambiato di una quantità:

$$\frac{y_1}{f}$$

avremo cioè:

$$(3) \quad y' = y'_1 + \frac{y_1}{f}$$

Le (2) e (3) si possono esprimere sinteticamente dalla relazione:

$$\begin{vmatrix} y \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{vmatrix}$$

Va tenuto presente che l'attuale trattazione presume valida la cosiddetta approssimazione di "hard edge", nella quale si considera perfettamente definito il confine tra la regione ove esiste il campo magnetico e la regione che ne è priva.

Nel caso particolare di un microtrone a due settore l'espressione completa della matrice M_V che descrive il moto verticale è:

54.

$$(5.22) \quad M_V = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos n \frac{1}{2} \theta & \rho n \frac{1}{2} \operatorname{sen} n \frac{1}{2} \theta \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{sen} n \frac{1}{2} \theta & \cos n \frac{1}{2} \theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1/\rho \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dove la:

$$(5.23) \quad \begin{vmatrix} \cos n \frac{1}{2} \theta & \rho n \frac{1}{2} \operatorname{sen} n \frac{1}{2} \theta \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{sen} n \frac{1}{2} \theta & \cos n \frac{1}{2} \theta \end{vmatrix}$$

è la matrice di trasferimento.

La:

$$(5.24) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1/\rho \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

è la matrice della "sezione diritta" ove l è la lunghezza della "sezione diritta" e la matrice unitaria sostituisce la matrice di bordo essendo $\delta=0$. Analogamente, per il moto radiale si ottiene:

$$(5.25) \quad M_R = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos (1-n) \frac{1}{2} \theta & \operatorname{sen} (1-n) \frac{1}{2} \theta \\ -\frac{(1-n)}{\rho} \operatorname{sen} (1-n) \frac{1}{2} \theta & \cos (1-n) \frac{1}{2} \theta \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1/\rho \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tenendo conto che in un microtrone a due settori $\theta = \pi$ si ha per le espressioni delle tracce rispettivamente:

$$(5.26) \quad \operatorname{Tr.} M_V = 2 \cos n \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{\rho} n \frac{1}{2} \operatorname{sen} n \frac{1}{2} \pi$$

$$(5.27) \quad \operatorname{Tr.} M_R = 2 \cos (1-n) \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{\rho} (1-n) \frac{1}{2} \operatorname{sen} (1-n) \frac{1}{2} \pi$$

Dalla precedente trattazione risulta che affinché una particella rientri in cavità per la necessaria accelerazione, deve essere n costante lungo una data orbita all'interno di un determinato settore, potendosi, peraltro, concentrare le variazioni di n , sfruttando opportunamente l'azione foccheggiante degli spigoli, tra un settore e l'altro. E' ovvio che tale sistema non è applicabile al caso di un microtrone a due soli settori, ove l'angolo d'incidenza è nullo, e, poichè tutte le orbite debbono coincidere nella cavità, deve essere necessariamente $n=0$. Ci siamo valsi di questo esempio per meglio chia-

rire la metodologia fisica del foccheggiamento in questo tipo di acceleratore.

Per mostrare come si possa sfruttare l'azione del "foccheggiamento di bordo", mantenendo $n=0$ nei settori, tratteremo il caso di un microtrone a quattro settori, ciascuno di 90° (v. fig. 25), nel quale le due metà, a destra e a sinistra della cavità, sono l'una la immagine speculare dell'altra.

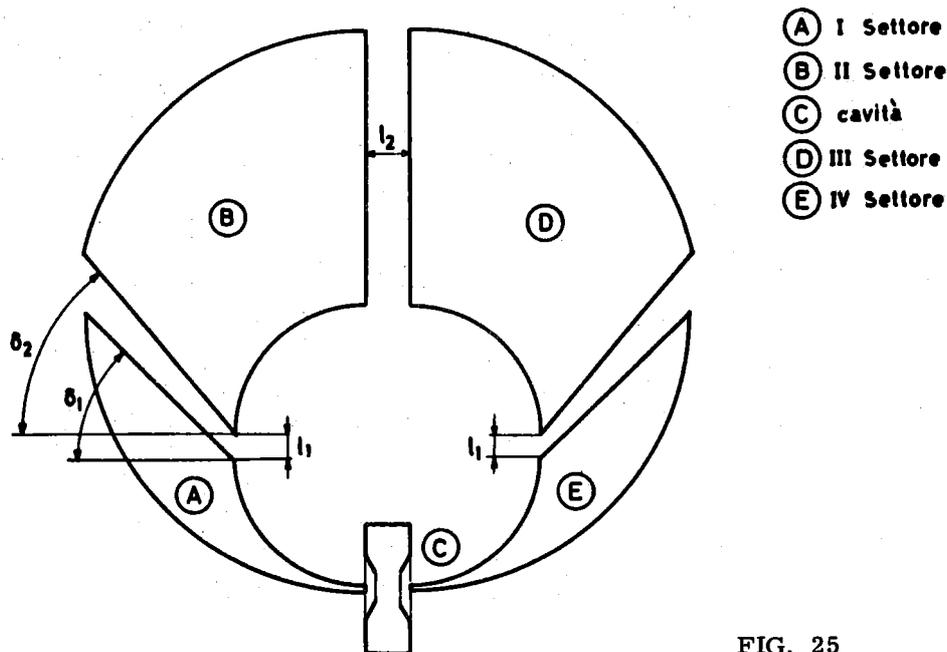


FIG. 25

In tal caso, la matrice di trasferimento si riduce, essendo $\theta = \pi/2$, a:

$$(5.28) \quad M_{\text{sec. R}} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \vartheta \sin \theta \\ -\frac{1}{\vartheta} \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \vartheta \\ -\frac{1}{\vartheta} & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5.29) \quad M_{\text{sec. V}} = \begin{vmatrix} 1 & \vartheta \theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice verticale è equivalente a quella di una sezione diritta di lunghezza $\vartheta \theta$.

Per quel che riguarda gli spigoli dei settori magnetici, si è pensato di far dipendere la variazione di n dalla scelta di δ_2 , lasciando δ_1 fisso.

Poichè i settori non sono identici, il problema - sostanzialmente - consiste, non tanto nel trovare la periodicità del moto di betatrone, quando la frequenza di rivoluzione ν che è legata alla variazione di fase dalla relazione:

$$\nu = \frac{N\sigma}{2\pi}$$

essendo per un'intera rivoluzione, $2 \cos \sigma =$ traccia della matrice e N il numero dei settori.

Daremo, ora, l'espressione completa, per un intero periodo, delle matrici verticali e radiale, partendo dalla sinistra della cavità e procedendo in senso orario. Avremo per il moto radiale:

$$(5.30) \quad M_R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 0 & \rho & | & 1 & 0 & | & 1 & l_1/\rho & | & 1 & 0 & | & 0 & \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{\rho} & 0 & | & T_1 & 1 & | & 0 & 1 & | & T_2 & 1 & | & -\frac{1}{\rho} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 1 & l_2/\rho & | & 1 & 0 & | & 0 & \rho & | & 1 & 0 & | & 1 & l_1/\rho \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 & | & \times & 0 & | & 0 & 1 & | & -\frac{1}{\rho} & 0 & | & T_2 & 1 & | & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 0 & \rho & | & 1 & 0 & | & 1 & l_2/\rho & | & \\ T_1 & 1 & | & -\frac{1}{\rho} & 0 & | & 0 & 1 & | & 0 & 1 & | & \end{vmatrix}$$

con

$$T_1 = -\frac{\text{tg } \delta_1}{\rho} \quad T_2 = \frac{\text{tg } \delta_2}{\rho}$$

Nella (5.30) si sono trascurati gli effetti nella cavità.

Per il moto verticale avremo:

$$(5.31) \quad M_V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 1 & \rho \theta & | & 1 & 0 & | & 1 & l_1/\rho & | & 1 & 0 & | & 1 & \rho \theta & | \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 & | & T_1 & 1 & | & 0 & 1 & | & T_2 & 1 & | & 0 & 1 & | \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & 1 & l_2/\rho & | & 1 & 0 & | & 1 & \rho \theta & | & 1 & 0 & | & 1 & l_1/\rho & | \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 & | & \times & 0 & | & 0 & 1 & | & T_2 & 1 & | & 0 & 1 & | \end{vmatrix} \dots$$

$$(5.31) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ T_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{S} \theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & l_2/\mathfrak{S} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

con

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad T_1 = \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\mathfrak{S}} \quad T_2 = \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\mathfrak{S}}$$

La traccia di M_R è data da:

$$(5.32) \quad \operatorname{tr.} M_R = 2 \cos \mathfrak{S}_R = 2 + 4l_1(T_1 + T_2) + 4l_1^2 T_1 T_2 - 4 \frac{l_1 l_2}{\mathfrak{S}^2} - 2 \frac{l_1^2 l_2}{\mathfrak{S}^2} (T_1 + T_2) + \frac{(l_1 l_2)^2}{\mathfrak{S}^4}$$

e la traccia M_V è data da:

$$(5.33) \quad \begin{aligned} \operatorname{Tr} M_V = 2 \cos \mathfrak{S}_V = 2 + (T_1 + T_2) [& 4l_1 + 4l_2 + 8 \mathfrak{S} \theta + T_1 T_2 (2l_1 l_2^2 + 2l_1^2 l_2 + 10l_1 l_2 \mathfrak{S} \theta + \\ & + 10l_1 \mathfrak{S}^2 \theta^2 + 2l_1^2 \mathfrak{S} \theta)] + l_1 \mathfrak{S} \theta [4(T_1 + T_2)^2 + 8T_1 T_2] + l_1 l_2 [2(T_1 + T_2)^2 + \\ & + 4T_1 T_2] + 4l_2 \mathfrak{S} \theta (T_1 + T_2)^2 + 4 \mathfrak{S}^2 \theta^2 (T_1 + T_2)^2 + 4l_1^2 T_1 T_2 + l_2^2 (T_1 + T_2)^2 + \\ & + T_1^2 T_2^2 l_1^2 (l_2^2 + 4l_2 \mathfrak{S} \theta + 4 \mathfrak{S}^2 \theta^2) \end{aligned}$$

Queste espressioni si possono semplificare notevolmente se $T_1 = -T_2 = 1$: cioè, se $|\delta_1| = |\delta_2| = 45^\circ$. Ciò dà origine ad un campo che aumenta col raggio e perciò n è negativo.

In tal caso abbiamo:

$$(5.34) \quad \operatorname{Tr.} M_R = 2 - 4l_1^2 - 4l_1 l_2 + l_1^2 l_2^2$$

$$(5.35) \quad \operatorname{Tr.} M_V = 2 - 8l_1 \theta - 4l_1 l_2 - 4l_1^2 + l_1^2 l_2^2 + 4l_1^2 l_2 \theta + 4l_1^2 \theta^2$$

Per il criterio di stabilità deve essere:

$$(5.36) \quad |\operatorname{Tr} M_R| < 2 \quad \text{e} \quad |\operatorname{Tr} M_V| < 2$$

e cioè:

$$a) \quad 4l_1^2 + 4l_1 l_2 - l_1^2 l_2^2 > 0$$

$$b) \quad 8l_1 \theta + 4l_1 l_2 + 4l_1^2 - l_1^2 l_2^2 - 4l_1^2 l_2 \theta - 4l_1^2 \theta^2 > 0$$

58.

con l_1 ed l_2 misurati in unità di \mathcal{F} .

Dalle condizioni (5.36) segue che si ha stabilità:

nel caso a) per:

$$(5.37) \quad l_1 > \frac{4l_2}{l_2^2 - 4}$$

nel caso b) per:

$$(5.38) \quad l_1 > \frac{4l_2 + 8\theta}{(l_2^2 + 4l_2\theta + 4\theta^2 - 4)}$$

Le (5.37) e (5.38) stabiliscono le relazioni alle quali devono soddisfare le grandezze l_1 , l_2 , e θ perchè s'abbia stabilità sia assiale che radiale.

Un microtrone, realizzato secondo lo schema descritto, presenterebbe su quello a gradiente costante il vantaggio di ridurre notevolmente lo sparpagliamento del fascetto elettronico.

Infatti, come è noto, uno dei difetti del microtrone tradizionale è la notevole perdita di elettroni nelle orbite esterne, dovuto al fatto che il campo, in realtà, decresce all'aumentare del raggio: per esempio, nel caso del microtrone di Frascati, un campo di 1000 gauss si può ritenere con buona approssimazione uniforme solo fino a 15-16 cm dal centro della camera a vuoto; per distanze maggiori esso precipita rapidamente.

Per questa ragione occorre contenere il numero delle orbite e quindi l'energia ottenibile.

Nel microtrone a 4 settori, il campo, invece, aumenta all'aumentare del raggio ($n < 0$): è quindi possibile sfruttare anche le orbite più esterne e quindi avere un fascio estratto meglio collimato ed energie maggiori.

CAPITOLO 6 -

INFLUENZA DELLA FORMA DELL'APERTURA DI TRANSITO DI UNA CAVITÀ CILINDRICA SUL MOTO DEGLI ELETTRONI. -

Consideriamo il moto verticale degli elettroni in un microtrone che ha una cavità di forma cilindrica.

Nella fig. 26 è indicata una sezione del microtrone, eseguita sul piano mediano, contenente la cavità e un'orbita.

Sia il campo elettrico \underline{E} , dovuto alla radiofrequenza, diretto secondo l'asse y e sia il campo magnetico-guida ortogonale al piano della figura.

Le forze che determinano il moto verticale, cioè, secondo l'asse z , sono:

a) - in prossimità dei bordi delle aperture di transito della cavità, la forza $E_z = qE_z$, dovuta alla componente verticale E_z del campo elettrico di accelerazione.

b) - all'interno della cavità la forza $F_z = qV_y H_x$, dovuta alla componente orizzontale H_x indotta alla variazione in cavità del campo elettrico E_y .

Calcoliamo ora l'espressione analitica di E_z per una cavità sempre cilindrica, ma per diverse forme di aperture di transito.

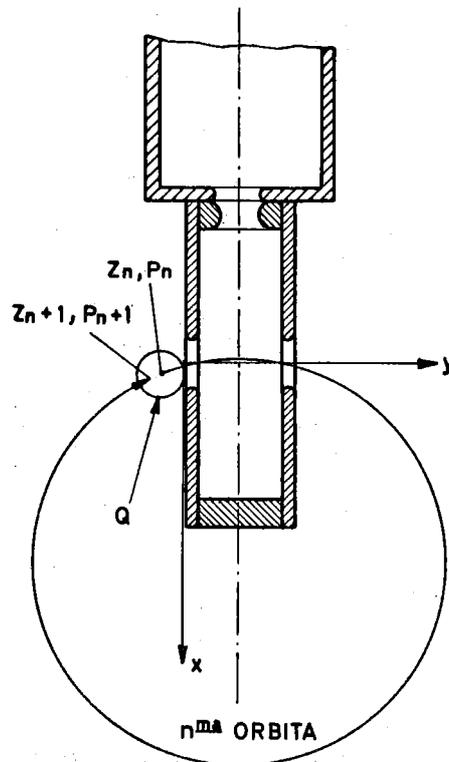


FIG. 26

In prossimità dell'apertura di transito, dalla equazione $\text{div } \underline{E} = 0$ risulta quanto segue:

I^o) - Caso in cui l'apertura di transito sia un foro circolare. Esprimiamo la divergenza in coordinate cilindriche e assumiamo la z come coordinata radiale. Ne segue:

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z E_z) + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

da cui:

$$(6.1) \quad \frac{E_z}{z} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

in prima approssimazione, cioè per piccoli valori di z è:

$$E_z(z) = E_z(0) + z \frac{\partial E_z}{\partial z} = z \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \text{essendo } E_z(0) = 0;$$

sostituendo nella (6.1) si ottiene:

$$(6.2) \quad E_z = - \frac{z}{2} \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

II^o) - Caso in cui l'apertura di transito sia una fessura rettangolare con il lato maggiore parallelo all'asse x .

Esprimiamo ora la divergenza in coordinate cartesiane ortogonali.

In tal caso si ha:

$$(6.1') \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

ma per piccoli valori di z è ancora

$$E_z(z) = E_z(0) + z \frac{\partial E_z}{\partial z} = z \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

per cui, sostituendo nella (6.1'), si ottiene:

$$(6.3) \quad E_z = -z \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

III^o) - Caso in cui l'apertura di transito sia una fessura rettangolare con il lato maggiore parallelo all'asse z .

Nella nostra approssimazione risulta:

$$(6.4) \quad E_z = 0$$

La componente orizzontale H_x si ricava dall'equazione:

$$(\text{rot } \underline{H})_y = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

esprimendo ancora la rotazione in coordinate cilindriche per un foro circolare e in coordinate rettangolari per una fessura rettangolare orizzontale.

Per i piccoli valori di z si ha rispettivamente:

$$(6.5) \quad (H_x)_{\text{cil.}} = -\frac{z}{2} \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad (H_x)_{\text{rett.}} = -z \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Il segno $-$ è dovuto a considerazioni sui versi del campo elettromagnetico che agisce sul moto degli elettroni.

Se indichiamo con α il parametro che tiene conto della forma del foro della cavità, avremo, dalle (6.2), (6.3), (6.4), (6.5):

$$(6.6) \quad E_z = -\alpha z \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

$$H_x = -\alpha \frac{z}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

con:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \alpha &= 1/2 && \text{per il foro circolare} \\ \alpha &= 1 && \text{per la fessura orizzontale} \\ \alpha &= 0 && \text{per la fessura verticale} \end{aligned}$$

Dalle (6.6) e (6.7) risulta che una fenditura orizzontale esercita un'azione in senso verticale due volte maggiore di un foro circolare.

Chiameremo quest'azione di orientamento verticale esercitata dal campo elettromagnetico della cavità sul moto degli elettroni: "focheggiamento verticale della cavità".

Tenendo presente quanto esposto, calcoleremo l'entità del focheggiamento verticale, facendo le seguenti ipotesi:

1) - si supporrà trascurabile, rispetto alla lunghezza della cavità, la regione intorno ai bordi dell'apertura medesima, dove il campo elettrico è non omogeneo;

2) - si terrà conto dell'influenza delle componenti E_y e H_x sul moto degli elettroni in cavità;

3) - si supporrà che gli elettroni viaggino con velocità costante.

Siano, quindi z_n e p_n la coordinata verticale e il momento di un elettrone nell' n esima orbita, nel punto Q (v. fig. 26). Vogliamo conoscere i valori z_{n+1} e p_{n+1} della coordinata e del momento al medesimo punto Q, dopo che l'elettrone ha compiuto una intera orbita e, quindi, un transito in cavità.

Dalla teoria delle matrici avremo:

$$(6.8) \quad \begin{vmatrix} z_{n+1} \\ p_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_n \\ p_n \end{vmatrix}$$

dove:

$$(6.9) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

è la "matrice di trasferimento" che tiene conto degli effetti focalizzanti della cavità.

E' noto che in tal caso la (6.9) descrive un'oscillazione verticale del tipo:

$$(6.10) \quad z_N = b \cos(\theta + \epsilon_z N)$$

dove b è l'ampiezza dell'oscillazione e ϵ_z è la variazione di fase dell'oscillazione quando l'elettrone traversa la cavità, N è il numero dei transiti.

Il legame tra ϵ_z e gli elementi della matrice (6.9), è dato dalla relazione:

$$(6.11) \quad \cos \epsilon_z = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} S$$

dove

$$(6.12) \quad S = a_{11} + a_{22}$$

è la traccia della matrice (6.9).

Dovendo essere:

$$-1 < \cos \epsilon_z < +1$$

62.

segue dalla (6.11):

$$(6.13) \quad -2 < S < +2$$

Diremo, quindi, che si ha stabilità verticale, quando è verificata la disuguaglianza (6.13).

Per $|S| \geq 2$ non si ha stabilità verticale.

CALCOLO DELLA MATRICE DI TRASFERIMENTO (6.9). -

Sia:

$$(6.14) \quad \frac{dp_z}{dt} = q E_z + q \beta H_x$$

l'equazione del moto verticale degli elettroni.

Sostituendo i valori dati dalla (6.6), avremo:

$$(6.15) \quad \frac{dp_z}{dt} = -q \alpha z \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\beta}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

da cui, ponendo:

$$(6.14') \quad \begin{aligned} p_z &= \gamma m_o \frac{dz}{dt} \\ E_y &= E \\ dA &= c dt \\ mc^2 &= \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_o \gamma c^2 \\ u &= \frac{m_o c^2}{q} \end{aligned}$$

segue:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_o \gamma}{q} \frac{dz}{dt} \right) = -\alpha z \left(\frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\beta}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

ed ancora:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{m_o c^2 \gamma}{q} \frac{dz}{ds} \right) = -\alpha z \left(\frac{\partial E}{\partial y} + \beta \frac{\partial E}{\partial s} \right)$$

ed infine:

$$(6.15) \quad \frac{d}{ds} \left(u \gamma \frac{dz}{ds} \right) = -\alpha z \left(\frac{\partial E}{\partial y} + \beta \frac{\partial E}{\partial s} \right)$$

Dalla (6.15) ricordando la posizione (6.14') segue che:

$$(6.16) \quad p_z = u \gamma \left(\frac{dz}{ds} \right)$$

Integrando la (6.15) si ottiene la variazione dell'impulso nell'attraversare la "gap".

Da ora in poi indicheremo con l'indice 1, il valore di una grandezza fisica all'ingresso della cavità; con l'indice 2, il valore della stessa grandezza all'uscita della cavità dopo un transito; senza alcun indice il valore della grandezza in un punto interno alla "gap" della cavità. La (6.15), integrata facendo la sostituzione $ds = (dy/\beta)$ e tenendo presente che E_1 ed E_2 sono il campo elettrico visto dall'elettrone all'ingresso e all'uscita della "gap" dà, come risultato,

$$(6.17) \quad p_2 - p_1 = -\alpha z (1 - \beta^2) (E_1 - E_2)$$

Poichè il problema è di conoscere la variazione della quota e dell'impulso dello elettrone tra il punto 1, ingresso in cavità, e il punto 2, uscita dalla cavità dopo il transito, per facilitare il calcolo procederemo nella maniera seguente:

- 1°) - Supporremo $\beta = 1$, cioè gli elettroni relativistici.
- 2°) - Supporremo che l'elettrone entri nella "gap" con inclinazione nulla, cioè $(dz/dy)_1 = 0$ ed esamineremo come esso viene deflesso dalla cavità.
- 3°) - Supporremo che l'elettrone entri nella "gap" con quota $z_1 = 0$ ed esca con quota $z_2 \neq 0$ e abbia, all'ingresso, un'inclinazione diversa da zero, cioè sia $(dz/dy)_1 \neq 0$.
- 4°) - Sommeremo i risultati ottenuti ai punti 2°) e 3°), per avvicinarci il più possibile alla realtà sperimentale, cioè:

$$z_1 \neq 0; \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)_1 \neq 0 \quad e \quad z_2 \neq 0; \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)_2 \neq 0$$

Dalla posizione $\beta = 1$, si ha per la (6.15):

$$(6.18) \quad \frac{d}{ds} \left(u \gamma \frac{dz}{ds} \right) = -\alpha z \left(\frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial s} \right)$$

ed essendo:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = c$$

si ha:

$$dy = c dt = ds$$

A questo punto dobbiamo osservare che il termine: $\partial E / \partial s$ al secondo membro della (6.18) tiene conto essenzialmente degli effetti focheggianti subiti dall'elettrone nello attraversare l'interno della cavità. Ora va notato che, poichè l'elettrone all'interno della cavità viene accelerato dalla componente longitudinale del campo elettrico, gli effetti focalizzanti saranno sensibilmente inferiori a quelli subiti nell'attraversare il foro di ingresso della cavità ove è concentrata la massima variazione di E_y e dove l'elettrone non ha ancora subito quasi alcuna accelerazione. Per questa ragione si può trascurare al secondo membro della (6.18) il termine $\partial E / \partial s$ rispetto a $\partial E / \partial y$. Un ragionamento qualitativamente analogo a quello fatto sopra ci porta a trascurare gli effetti defoccheggianti subiti dall'elettrone nell'attraversare il foro di uscita della cavità.

Dalla (6.18) segue quindi:

$$(6.19) \quad u \gamma \left(\frac{dz}{dy}\right) - u \gamma_1 \left(\frac{dz}{dy}\right)_1 = -\alpha \int_0^y z \frac{\partial E}{\partial y} dy$$

Osservando che:

$$(6.20) \quad \vartheta u = \vartheta_1 u + \int_0^y E dy$$

e che in unità di energia per un microtrone che lavori nel modo fondamentale, è:

$$(6.20') \quad (\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{1}{u} \int_0^1 E dy = \frac{\Delta \xi}{E_0} = 1$$

ove 1 è la lunghezza della "gap", sostituendo nelle (6.19) e (6.20), si ottiene:

$$\left(\frac{dz}{dy} \right) - \left(\frac{dz}{dy} \right)_1 = - \frac{\alpha}{\vartheta_1 u} \left\{ \int_0^y z \frac{\partial E}{\partial y} dy + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dz}{dy} \right) \int_0^y E dy \right\}$$

e cioè:

$$(6.21) \quad \left(\frac{dz}{dy} \right) - \left(\frac{dz}{dy} \right)_1 = - \frac{\alpha}{\vartheta_1 u} \left\{ zE - \int_0^y E \left(\frac{dz}{dy} \right) dy + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dz}{dy} \right) \int_0^y E dy \right\}$$

Cerchiamo ora, per approssimazioni successive, una soluzione dell'equazione (6.21). Come primo passo sostituiamo a z e $e(dz/dy)$ i valori iniziali, che nel nostro caso, per la posizione di cui al punto 2°, sono: $z = z_1$ e $(dz/dy)_1 = 0$.

Risulta allora:

$$(6.22) \quad \frac{dz}{dy} = - \frac{\alpha}{\vartheta_1 u} z_1 E$$

integrando la quale si ottiene:

$$(6.23) \quad z = z_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\vartheta_1 u} \int_0^y E dy \right)$$

Sostituiamo di nuovo i valori trovati di z e dz/dy nella (6.21).

Si ottiene ora:

$$(6.24) \quad \frac{dz}{dy} = - \frac{\alpha}{\vartheta_1 u} \left\{ z_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\vartheta_1 u} \right) E \int_0^y E dy + \frac{\alpha z_1}{\vartheta_1 u} \int_0^y E^2 dy - \frac{z_1}{\vartheta_1 u} E \int_0^y E dy \right\}$$

Poichè a noi interessa lo spostamento e l'inclinazione all'uscita della cavità dobbiamo calcolare dz/dy nel punto d'uscita dove E è di nuovo 0. L'equazione di dz/dy si semplifica quindi nella forma:

$$(6.25) \quad \left(\frac{dz}{dy} \right)_2 = - \left(\frac{\alpha}{\vartheta_1 u} \right)^2 z_1 \int_0^1 E^2 dy$$

Dalla (6.23), integrando tra 0 ed 1 si ha:

$$(6.26) \quad z_2 = z_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\vartheta_1 u} \int_0^1 E dy \right)$$

e ricordando la (6.20'):

$$(6.27) \quad z_2 = z_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma_1}\right)$$

Calcoliamo ora, l'impulso p_1 e p_2 con cui l'elettrone entra e lascia la "gap".

Dalla relazione

$$p = \gamma u \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ed essendo, per ipotesi:

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_1 = 0,$$

segue:

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = \gamma_2 u \left(\frac{dz}{dy}\right)_2$$

da cui, sostituendo l'espressione trovata per $(dz/dy)_2$ e ricordando che $\gamma_2 = \gamma_1 + 1$ si ha:

$$(6.29) \quad p_2 = -(\gamma_1 + 1) u \frac{\alpha^2}{(\gamma_1 u)^2} \gamma_1 \int_0^1 E^2 dy$$

Poniamo, ora:

$$k = \frac{1}{u^2} \int_0^1 E^2 dy$$

Si ha, allora:

$$(6.30) \quad p_2 = -(\gamma_1 + 1) \frac{\alpha^2 k u}{\gamma_1^2} z_1$$

Dalla posizione di cui al punto (3^o), essendo:

$$z_1 = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)_1 \neq 0$$

risulta:

$$(6.31) \quad z_2 = 1 \left(\frac{dz}{dy}\right)_1$$

Dalla (6.21) segue:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dy}\right)_2 - \left(\frac{dz}{dy}\right)_1 \approx & -\frac{\alpha}{\gamma_1 u} \left\{ z_1 E - \left(\frac{dz}{dy}\right)_1 \int_0^1 E dy + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dz}{dy}\right)_1 \int_0^1 E dy \right\} = \\ & -\frac{\alpha}{\gamma_1 u} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \left(\frac{dz}{dy}\right)_1 \int_0^1 E dy \end{aligned}$$

ed essendo $z_1 = 0$ e, per la (6.20'), $\frac{1}{u} \int_0^1 E dy = 1$ si ha:

66.

$$(6.32) \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)_2 = \left(\frac{dz}{dy}\right)_1 \left(1 - \frac{1-\alpha}{\gamma_1}\right)$$

Per l'impulso p_2 si ha:

$$p_2 = \gamma_2 u \left(\frac{dz}{dy}\right)_2$$

e per la (6.32), essendo:

$$\gamma_2 = \gamma_1 + 1, \quad p_2 = (\gamma_1 + 1) u \left(\frac{dz}{dy}\right)_1 \left(1 - \frac{1-\alpha}{\gamma_1}\right)$$

Ricordando che:

$$p_1 = \gamma_1 u \left(\frac{dz}{dy}\right)_1,$$

si ha ancora:

$$p_2 = (\gamma_1 + 1) \frac{p_1}{\gamma_1} \left(1 - \frac{1-\alpha}{\gamma_1}\right) = \left(1 + \frac{1}{\gamma_1}\right) p_1 \left(1 - \frac{1-\alpha}{\gamma_1}\right)$$

e trascurando i termini in γ_1^{-2} , si ha:

$$(6.33) \quad p_2 = p_1 \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_1}\right)$$

Dalla posizione di cui al punto (4°) segue, supposto:

$$\begin{aligned} z_1 & \quad e \quad z_2 & \neq 0 \\ \left(\frac{dz}{dy}\right)_1 & \quad e \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)_2 & \neq 0 \end{aligned}$$

sommando i risultati di cui ai punti (2°) e (3°) per la (6.27) e la (6.31), avremo:

$$(6.34) \quad z_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma_1}\right) z_1 + \frac{1 p_1}{\gamma_1 u}$$

Per l'impulso p , dalla (6.30) e dalla (6.33):

$$(6.35) \quad p_2 = \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_1}\right) p_1 - (\gamma_1 + 1) \frac{\alpha^2 k u}{\gamma_1^2} z_1$$

Le equazioni (6.34) e (6.35) si possono esprimere nella forma di matrice, nella maniera seguente:

$$(6.36) \quad \begin{vmatrix} z_2 \\ p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\alpha}{\gamma_1} & \frac{1}{\gamma_1} \frac{p_1}{u} \\ -\frac{\alpha^2 k u}{\gamma_1^2} (\gamma_1 + 1) & 1 + \frac{\alpha}{\gamma_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ p_1 \end{vmatrix}$$

CALCOLO DELLA MATRICE DI SPOSTAMENTO.

Per analogia con il criterio delle matrici applicato ai settori magnetici, anche in questo caso è possibile definire una matrice di spostamento relativa alla regione esterna alla cavità, ove l'elettrone non risente del campo elettromagnetico dovuto alla radiofrequenza.

Come è noto, nel traversare tale regione, l'impulso con cui l'elettrone descrive l'orbita rimane costante, mentre lo spostamento z_3 dal piano in cui giace l'orbita di equilibrio, aumenta linearmente all'aumentare della lunghezza dell'orbita percorsa, di una quantità proporzionale all'impulso p_2 con cui l'elettrone era uscita dalla cavità (vedi fig. 27).

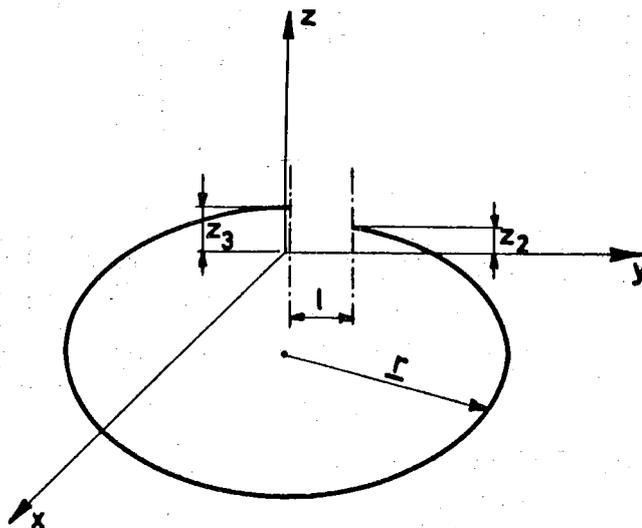


FIG. 27

Essendo la lunghezza del percorso compiuto dall'elettrone esternamente alla cavità uguale a $(2 \pi r - 1)$ e lo spostamento $z_3 = (2 \pi r - 1) (dz/dy)$ per la (6.16) risulta:

$$(3.36') \quad z_3 = z_2 + (2 \pi r - 1) \frac{p_2}{\gamma_2 u}$$

$$p_3 = 0 + p_2$$

ove:

$$s = (2 \pi r - 1) = [(n + 1) \lambda - 1]$$

e, per la (6.20'):

$$s = [(\gamma_1 + 1) \lambda - 1]$$

Sostituendo il valore trovato e ponendo la (3.36') in forma di matrice avremo in fine:

$$(6.37) \quad \begin{vmatrix} z_3 \\ p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (\lambda - \frac{1}{\gamma_1 + 1}) \frac{1}{u} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_2 \\ p_2 \end{vmatrix}$$

La matrice di spostamento si può, dunque, riscrivere nella forma:

$$(6.37') \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{u} \left(\lambda - \frac{1}{\sigma_1 + 1} \right) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sostituendo nella (6.37) la (6.36') si ha:

$$\begin{vmatrix} z_3 \\ p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{u} \left(\lambda - \frac{1}{\sigma_1 + 1} \right) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_2 \\ p_2 \end{vmatrix}$$

e perciò, ricordando la (6.36):

$$\begin{vmatrix} z_3 \\ p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{u} \left(\lambda - \frac{1}{\sigma_1 + 1} \right) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 - \frac{\alpha}{\sigma_1} & \frac{1}{\sigma_1 u} \\ -\frac{(\sigma_1 + 1) \alpha^2 k u}{\sigma_1^2} & 1 + \frac{\alpha}{\sigma_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ p_1 \end{vmatrix}$$

La matrice prodotto risulta essere:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\alpha}{\sigma_1} - \left(\lambda - \frac{1}{\sigma_1 + 1} \right) \frac{\sigma_1 + 1}{\sigma_1^2} \alpha^2 k & \frac{1}{\sigma_1 u} + \frac{1}{u} \left(\lambda - \frac{1}{\sigma_1 + 1} \right) \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma_1} \right) \\ -\frac{(\sigma_1 + 1) \alpha^2 k u}{\sigma_1^2} & 1 + \frac{\alpha}{\sigma_1} \end{vmatrix} \quad (6.38)$$

La traccia della matrice prodotto è quindi:

$$S = 2 - \left(\lambda - \frac{1}{\sigma_1 + 1} \right) \frac{\sigma_1 + 1}{\sigma_1^2} \alpha^2 k$$

e, sviluppando i calcoli:

$$S = 2 - \lambda \frac{\sigma_1 + 1}{\sigma_1^2} \alpha^2 k + \frac{\alpha^2 k}{\sigma_1^2}$$

Trascurando i termini di ordine σ^{-2} , si ha:

$$S = 2 - \frac{\alpha^2 k \lambda}{\sigma_1}$$

Calcoliamo, infine, il valore numerico di S separatamente, per $\alpha = 1$ ed $\alpha = 1/2$ e per i seguenti valori degli altri parametri:

$$\begin{aligned}
 k &= 1 \\
 \lambda &= 10 \text{ cm} \\
 l &= 2 \text{ cm} \\
 \gamma_1 &= 10 \quad (E = E_0 \gamma_1 = 5 \text{ MeV}).
 \end{aligned}$$

Risulta:

$$\text{per } \alpha = \frac{1}{2}, \quad S = 1,88 \qquad \text{per } \alpha = 1, \quad S = 1,50$$

Per $\gamma_1 = 20$ ($E = 10$ MeV) si ha invece:

$$\text{per } \alpha = \frac{1}{2}, \quad S = 1,94 \qquad \text{per } \alpha = 1, \quad S = 1,75$$

Dal confronto con i risultati ricavati per $\gamma_1 = 10$, si può concludere che l'effetto di focalizzazione di una cavità cilindrica con l'apertura rettangolare ($\alpha = 1$) a energie di 10 MeV è ancora migliore dall'effetto di una cavità con apertura circolare ($\alpha = 1/2$) ad energie di soli 5 MeV.

Desisero ringraziare il Prof. Lucio Mezzetti per avermi ospitato nei Laboratori Nazionali di Frascati e, in particolare, il Dr. Ubaldo Bizzarri per il competente aiuto datomi nell'impostazione generale del lavoro.

APPENDICE 1^a.

CENNI SUL MICROTRONE PER POSITRONI. -

Nel Laboratorio dell'Istituto di Fisica P. N. Lebedev, è stata studiata la possibilità di usare il microtrone come acceleratore di positroni, ed è stato anche eseguito un controllo sperimentale del metodo proposto.

La possibilità di accelerare con uno stesso microtrone, sia elettroni che positroni, è dovuto sostanzialmente al fatto che, avendo le due particelle carica opposta e stessa massa, qualora si riesca a farle partire, almeno teoricamente, dallo stesso punto dello spazio con velocità uguale e contraria, esse percorreranno, in un dato campo magnetico la stessa orbita ma in senso opposto.

Poichè i due tipi di particelle, nel percorrere la loro orbita, attraversano la cavità in senso contrario, a parità di fase, rispetto al campo elettrico, saranno accelerate nella stessa maniera, ciascuna naturalmente sulla propria orbita, dal campo elettrico della cavità.

Ne segue che i criteri di stabilità di fase sono i medesimi per entrambe le particelle.

Una possibile realizzazione pratica del sistema accennato è mostrata schematicamente nel disegno in fig. 28.

- (A) - prima orbita positrona
- (B) - convertitore elettroni-positroni
- (C) - cavità
- (D) - prima orbita elettronica
- (E) - sorgente di elettroni
- (F) - ultima orbita positronica
- (G) - ultima orbita elettronica

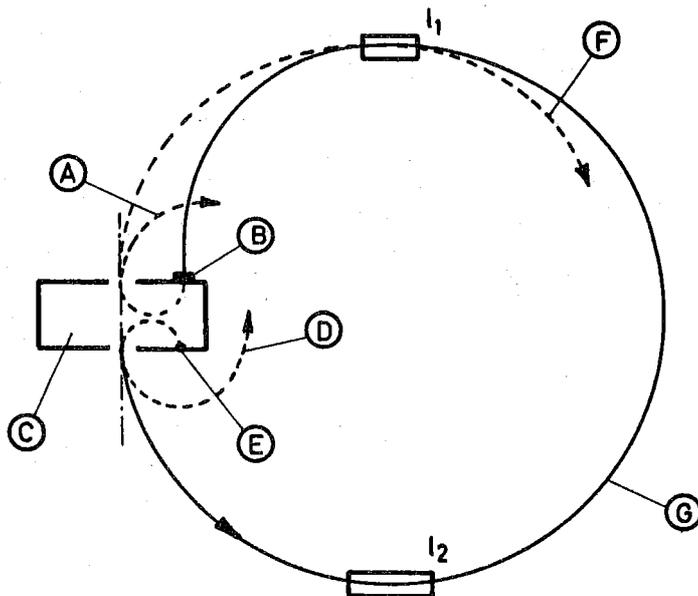


FIG. 28

Il criterio di funzionamento è quello di deviare opportunamente l'ultima orbita elettronica degli elettroni e di inviarla in un convertitore di positroni K posto sulla cavità. Il convertitore K consiste essenzialmente di un "target" di piombo con inserito un rallentatore per positroni in grafite. Da questo convertitore escono positroni a bassa energia, una cui frazione viene catturata e accelerata nella prima orbita.

E' opportuno ottenere i positroni alle basse energie poichè la densità positronica nello spettro di emissione è massima alle basse energie.

Alla deviazione dell'ultima orbita elettronica e a far sì che detti elettroni generino i positroni nella fase propizia per la cattura, provvedono i due canali magnetici di spostamento l_1 ed l_2 .

La lunghezza di questi canali è calcolata con le seguenti due relazioni approssimate:

$$l_2 - l_1 = \Delta l \approx \frac{1}{n}$$

$$l_2 + l_1 = \frac{\lambda}{2} + \lambda k$$

dove l_n è la distanza della sorgente di elettroni dall'asse della cavità; k è un numero intero; λ è la lunghezza d'onda della radiofrequenza.

Il vantaggio di avere due canali magnetici deriva dalla possibilità di regolare l_1 ed l_2 indipendentemente per ottenere un certo Δl ed un certo $(l_2 + l_1)$; più esattamente regolando $l_1 + l_2$, con Δl costante, si ottimizza la fase di cattura dei positroni, mentre variando Δl , con $(l_1 + l_2)$ costante, si ottimizza la posizione di uscita dei positroni dal convertitore K.

Il fascio di positroni è stato rivelato mediante rivelazione della radiazione di bremsstrahlung generate dall'urto del fascio sulla targhetta di piombo situata nell'ultima orbita.

Si è progettata, inoltre, un microtrone iniettore universale (v. fig. 29) per energie sino ai 9 MeV il quale permette di avere contemporaneamente un fascio di elettroni e uno di positroni.

K - convertitore elettroni-positroni
 u_1, u_2 - sorgenti di elettroni
 l - canale di deviazione

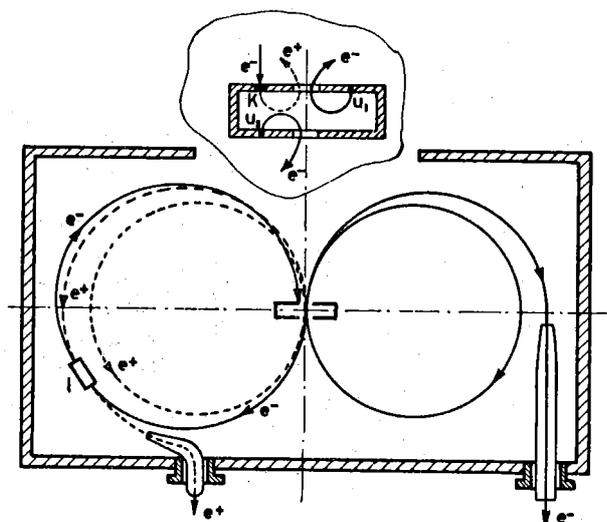


FIG. 29

Per realizzare l'iniettore universale sono state poste nella cavità due sorgenti elettroniche, alloggiata simmetricamente rispetto all'asse della cavità sulle facce opposte di quest'ultima.

In questa maniera la sorgente u_1 dà un normale fascio elettronico e la sorgente u_2 dà un fascio di "conversione". Il fascio di conversione, opportunamente deviato sul convertitore K dà luogo all'emissione di positroni. I particolari per l'estrazione dei due fasci, elettronico e positronico, sono ben visibili in figura.

APPENDICE 2^a.

STUDIO DEL MOTO DI UN ELETTRONE ENTRO UNA CAVITA' RISONANTE. -

In questo capitolo viene studiato il moto di un elettrone soggetto simultaneamente al campo elettromagnetico esistente entro una cavità risonante e ad un campo magnetico costante e uniforme opportunamente orientato.

Le equazioni differenziali che regolano il moto dell'elettrone sono integrate numericamente e il risultato di detta integrazione è impiegato per la costruzione grafica delle traiettorie elettroniche nell'interno della cavità.

Con riferimento alle figure 30a e 30b, lo studio viene effettuato nelle seguenti condizioni:

- 1) La cavità, di forma cilindrica con raggio a ed altezza $2b$, ha l'asse coincidente con l'asse y e il piano mediano coincidente con il piano x, z .
- 2) Il modo di funzionamento della cavità è il modo TM 010.
- 3) Il campo magnetico costante è diretto secondo l'asse z .
- 4) Le condizioni iniziali del moto dell'elettrone sono scelte in maniera che la traiettoria giaccia nel piano x, y .

L'equazione del moto dell'elettrone si può scrivere:

$$(1) \quad \underline{F} = \frac{d}{dt} (m_v \underline{v}) = -q (\underline{E} + \underline{v} \wedge \underline{B})$$

con: $-q$ carica dell'elettrone.

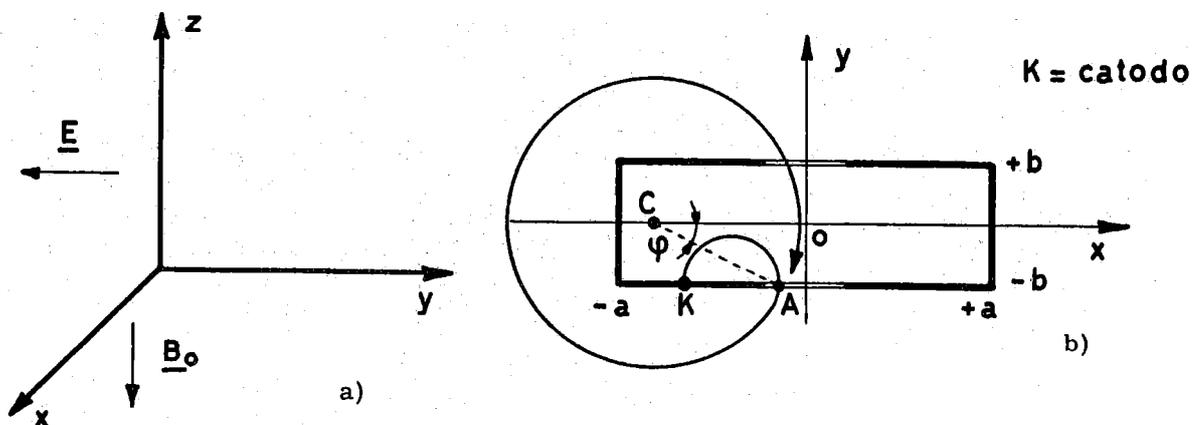


FIG. 30

La (1) equivale, per le ipotesi fatte, alle:

$$(2) \quad m_v \ddot{x} + \dot{x} \frac{dm_v}{dt} = -q B_z y$$

$$m_v \ddot{y} + \dot{y} \frac{dm_v}{dt} = -q E_y + q B_z \dot{x}$$

Se il campo elettromagnetico entro la cavità è del tipo $\underline{E}(t) = \underline{E}_0 \cos \omega t$, i campi E_y e B_z figuranti nella (2) hanno la forma:

$$(3) \quad E_y = -RE_0 J_0(kx) \cos \omega t$$

$$B_z = -B_0 - RE_0 \frac{\mu_0}{\eta_0} J_1(kx) \sin \omega t$$

ove: J_0 è la funzione di Bessel di ordine zero,

J_1 è la funzione di Bessel del primo ordine,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ed R è una costante che assume i seguenti valori:

$$R = 1 \quad \text{per } -a \leq x \leq +a; \quad -b \leq y \leq +b$$

$$R = 0 \quad \text{per } x < -a, x > +a; \quad y < -b, y > +b$$

Facendo comparire la variabile $\psi = \omega t$ ed indicando con l'apice (') la derivata rispetto a ψ , le (2), tenendo conto delle (3) si trasformano nelle:

$$(4) \quad \begin{aligned} \omega^2 m_v x'' + \omega^2 x' (m_v)' &= \omega q B_0 y' + \omega q \frac{RE_0}{c} J_1(kx) y' \sin \psi \\ \omega^2 m_v y'' + \omega^2 y' (m_v)' &= q RE_0 J_0(kx) \cos \psi - \omega q B_0 x' - \omega q \frac{RE_0}{c} J_1(kx) x' \sin \psi \end{aligned}$$

Introducendo, per comodità, le quantità:

$$N = \frac{q RE_0}{\omega} J_0(kx) \cos \psi$$

$$M = q B_0 + \frac{q RE_0}{c} J_1(kx) \sin \psi$$

le (4) si possono scrivere:

$$(5) \quad \omega m_v x'' + \omega x' (m_v)' = My'$$

$$\omega m_v y'' + \omega y' (m_v)' = N - Mx'$$

Introduciamo anche la quantità γ mediante l'espressione:

74.

$$m_v = \gamma m_o = \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}(x'^2+y'^2)}}$$

da cui segue poi:

$$(m_v)' = \frac{d}{dy} (m_v) = \gamma^3 m_o \frac{\omega^2}{c^2} (x'x''+y'y'')$$

Le (5) divengono:

$$\omega \gamma m_o x'' + \omega \gamma^3 m_o \frac{\omega^2}{c^2} (x'x''+y'y'')x' = My' \quad (6)$$

$$\omega \gamma m_o y'' + \omega \gamma^3 m_o \frac{\omega^2}{c^2} (x'x''+y'y'')y' = N - Mx'$$

che si possono anche scrivere, moltiplicando per $1/\omega m_o \gamma^3$, e facendo le sostituzioni:

$$F = \frac{M}{m_o \omega} \quad \text{e} \quad G = \frac{N}{m_o \omega}$$

$$x'' \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega^2}{c^2} x'^2 \right) + y'' \frac{\omega^2}{c^2} x' y' = \frac{F}{\gamma^3} y' \quad (7)$$

$$x'' \frac{\omega^2}{c^2} x' y' + y'' \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega^2}{c^2} y'^2 \right) = \frac{1}{\gamma^3} (G - Fx')$$

Risolvendo materialmente le (7) rispetto a x'' e y'' , ricordando le espressioni di F , G , M , N e γ , si ha, sviluppando i calcoli:

$$x'' = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} (x'^2 + y'^2)} \left\{ \left[\frac{qB_o}{m_o \omega} + \frac{qRE_o}{m_o \omega c} J_1(kx) \text{sen } \psi \right] y' + \right. \\ \left. - \frac{qRE_o}{m_o c^2} J_o(kx) x' y' \cos \psi \right\} \quad (8)$$

$$y'' = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2} (x'^2 + y'^2)} \left\{ - \left[\frac{qB_o}{m_o \omega} + \frac{qRE_o}{m_o \omega c} J_1(kx) \text{sen } \psi \right] x' + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2} y'^2 \right) \frac{qRE_o}{m_o c^2} J_o(kx) \cos \psi \right\}$$

Le (8) si possono scrivere sinteticamente:

$$x'' = f(x', y', x, y, B_0, E_0, \omega, \varphi)$$

$$y'' = g(x', y', x, y, B_0, E_0, \omega, \varphi)$$

Esse vanno integrate assumendo come parametri fissi:

$$B_0, E_0, \omega$$

e come condizioni iniziali le:

$$x_A, x'_A, y_A, y'_A, \varphi_A$$

ove l'indice A si riferisce al punto di uscita dell'elettrone dalla cavità.

Il valore della fase φ si computa "all'indietro" a partire da φ_A . L'integrazione si arresta quando l'elettrone incontra una delle pareti della cavità, ossia $y = \pm b$.

Il calcolatore fornisce i valori delle coordinate del punto di incontro ed anche la energia e la fase dell'elettrone. Al calcolatore sono richiesti i valori delle seguenti grandezze:

- 1) Tensione, V_A , esistente al passaggio dell'elettrone nel punto A.
- 2) Raggio di curvatura, R, della prima orbita.
- 3) Coordinate del punto A.
- 4) Velocità dell'elettrone nel punto A.
- 5) Fase dell'elettrone, φ_0 , al centro della cavità.
- 6) Fase dell'elettrone, φ_A , nel punto A.
- 7) Campo elettrico, E_0 , al centro della cavità.

1) - Calcolo di V_A -

Sia $\Delta \mathcal{E}_1$ l'energia acquistata dall'elettrone nel transito del punto k al punto A e sia E_{in} l'energia di iniezione. Se E_1 è l'energia totale competente alla prima orbita e \mathcal{E}_A l'energia cinetica dell'elettrone all'uscita della cavità in A si ha:

$$(9) \quad \mathcal{E}_A = q V_A = E_{in} + \Delta \mathcal{E}_1 = E_1 - E_0$$

Poichè:

$$T_1 = \frac{2 \pi E_1}{q B c^2} = a T_{rf}$$

si ha immediatamente:

$$E_1 - E_0 = \frac{q B c^2 a T_{rf}}{2 \pi} - E_0 = \frac{q B c^2 a}{\omega} - m_0 c^2$$

e perciò:

$$(10) \quad V_A = \frac{a B c^2}{\omega} - \frac{m_0 c^2}{q}$$

2) - Calcolo di R. -

E':

$$R = \frac{p}{qB}$$

76.

poichè:

$$p c = \sqrt{(\mathcal{E}_A + E_0)^2 - E_0^2}$$

con \mathcal{E}_A energia cinetica competente alla prima orbita, si ha:

$$R = \frac{1}{c q B} \sqrt{(\mathcal{E}_A + E_0)^2 - E_0^2}$$

e cioè, ricordando che:

$$\mathcal{E}_A = q V_A,$$

$$R = \sqrt{\frac{q^2 V_A^2 + 2 q V_A E_0}{c^2 q^2 B^2}} = \sqrt{\frac{V_A^2}{c^2 B^2} + \frac{2 V_A E_0}{c^2 q B^2}}$$

Scriviamo ora R nella forma:

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_0}{q}} \sqrt{\frac{q V_A^2}{2 m_0 c^2} + \frac{V_A m_0 c^2}{c^2 m_0}}$$

e cioè semplicemente:

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_0}{q}} \sqrt{V_A^2 \frac{q}{2 m_0 c^2} + V_A}$$

Chiamando v^* la quantità:

$$v^* = V_A^2 \frac{q}{2 m_0 c^2} + V_A$$

si ha infine:

$$(11) \quad R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_0}{q}} \cdot v^*$$

3) - Calcolo delle coordinate del punto A. -

E' semplicemente (v. fig. 30b):

$$(12) \quad \begin{aligned} x_A &= -R + \sqrt{R^2 - b^2} \\ y_A &= -b \end{aligned}$$

4) - Calcolo della velocità dell'elettrone nel punto A.

E':

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_A = - \left| \frac{v}{A} \right| \sin \psi$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_A = - \left| \frac{v}{A} \right| \cos \psi$$

con:

$$\left| \frac{v}{A} \right| = \frac{p c^2}{E_A} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c^2}{p}\right)^2}}$$

Essendo $p = qBR$: ed $R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m V^x}{q}}$, si ha sostituendo:

$$\left| \frac{v}{A} \right| = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m_0 c^2}{2 q V^x}}}$$

Essendo poi (v. fig. 30b): $\sin \psi = \frac{b}{R}$ e $\cos \psi = \frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{R}$ si ha infine:

$$(13) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_A = - \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m_0 c^2}{2 q V^x}}} \frac{b}{R}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_A = - \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m_0 c^2}{2 q V^x}}} \frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{R}$$

5) - Calcolo di ψ_0 .

Il calcolo si effettua imponendo che l'elettrone sia sincrono al passaggio per il centro della cavità.

Supponendo l'andamento della tensione del tipo:

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

si ha allora:

$$\frac{2 \pi V_0 \cos \psi_0}{c^2 B} = b T_{rf}$$

e cioè, per $b=1$,

$$\cos \psi_0 = \frac{c^2 B}{\omega V_0}$$

e perciò:

$$(14) \quad \psi_0 = \arccos \frac{c^2 B}{\omega V_0}$$

78.

5) - Calcolo di φ_A .

Con riferimento alla figura 30b è semplicemente: $\sin \varphi = b/R$ e cioè:

$\varphi = \arcsen \frac{b}{R}$. Tenendo conto della molteplicità $a = 2$ del modo fondamentale si ha:

$$\varphi_A = \varphi_0 + 2 \arcsen \frac{b}{R}.$$

7) - Calcolo di E_0 .

E' semplicemente:

$$E_0 = \frac{V_0}{2b}$$

In fig. 31 sono mostrate alcune traiettorie calcolate numericamente, nel modo esposto precedentemente, per una particolare terna di valori: ω , E_0 , B_0 , e in corrispondenza di valori differenti di φ_0 .

$\omega = 1.7907076 \text{ E} + 10$
 $E_0 = 3.8000000 \text{ E} + 07$
 $B_0 = 1.0200000 \text{ E} - 01$

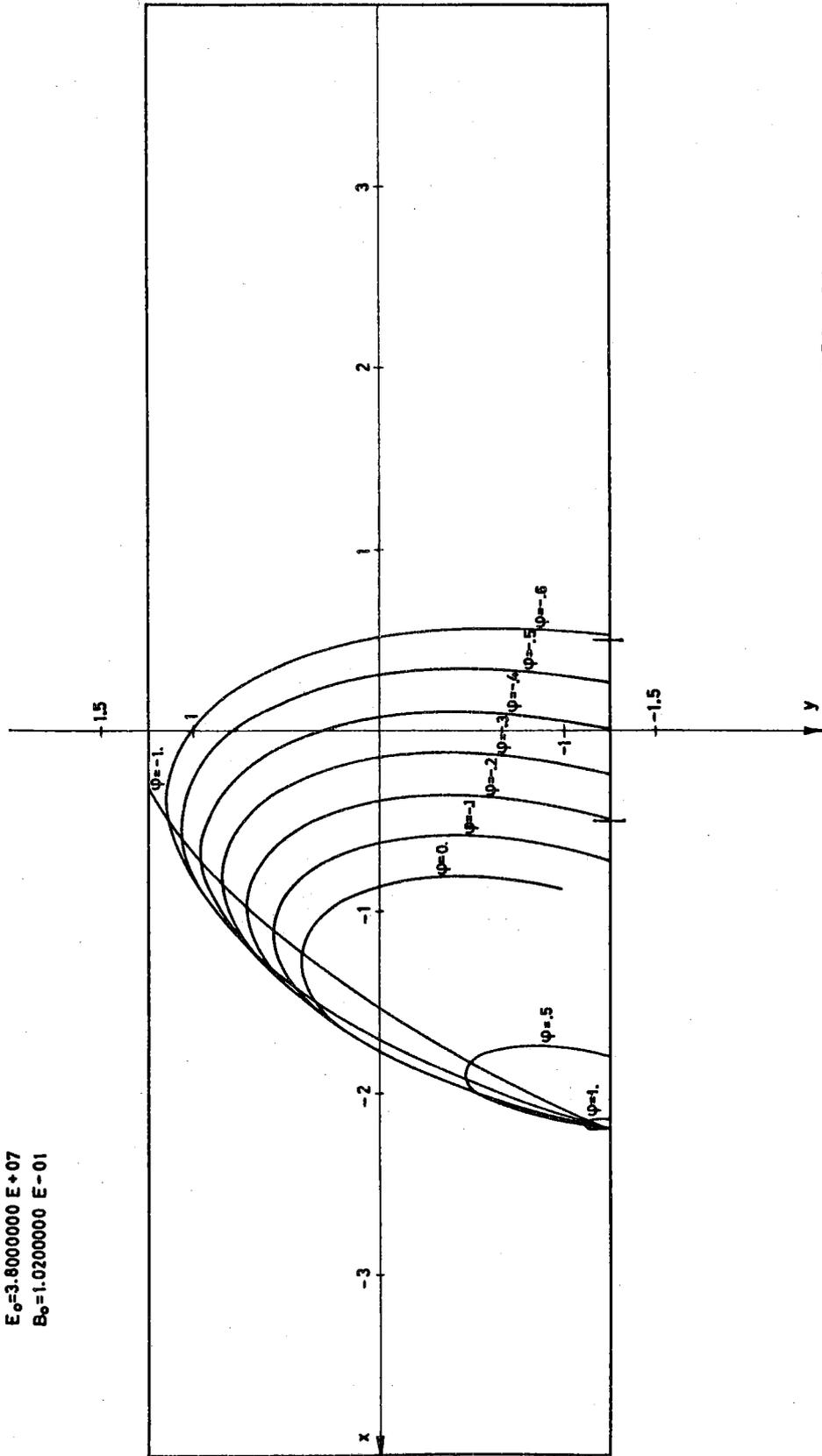


FIG. 31

BIBLIOGRAFIA. -

Capitolo 1 -

- (1) - V.I. Veksler, DAN SSSR, 43, 346 (1944).
- (2) - J.I. Itoh, D. Kobayashi, Kagaku 17, 34 (1947); Sci papers from the Osaka University, N. 12, 1 (1949).
- (3) - C. Henderson, F.F. Heymann, R.E. Jennings, Proc. Phys. Soc. (London), B66, 654 (1953).
- (4) - H.F. Kaiser, Rev. Sci. Instr. 25, 1025 (1954).
- (5) - A. Carrelli, F. Porreca, Nuovo Cimento, 6, 729 (1957).
- (6) - A.P. Grinberg, Usp. Fiz. Nauk, 75, 421 (1961).
- (7) - K.A. Belovintsev, A.Y. Belyak, A.M. Gromov, E.M. Moroz, P.A. Cherenkov, Atomnaya Energiya, 14, 359 (1963); J. of Nucl. Phys. Part. C, 6, 85 (1964).

Capitolo 2 -

- (1) - C. Schmelzer, Z. Naturforschung 7a, 808 (1952).
- (2) - E. Persico, Lezioni sulle macchine acceleratrici, Roma (1958 - 1959).
- (3) - O. Wernholm, Ark Fys., 16, 525 (1960).
- (4) - A.A. Kolomenskii, So. Phys., Techn. Phys. 5, N. 11, 1278 (1961).
- (5) - S.K. Godunov V.S. Ryabenki, Theory of difference schemes, Cap. I^o, North Holland - Publishing Company, Amsterdam (1964).

Capitolo 3 -

- (1) - C. Henderson, F.F. Heymann, R.E. Jennings, Proc. Phys. Soc. (London), B66, 654 (1953).
- (2) - V.P. Bykov, Sov. Phys. Techn. Phys. - 8, N. 3, 247 (1963).

Capitolo 4 -

- (1) - P.A. Redhead, H. Le Caine, W.J. Henderson, Can. J. Res. A27, 73 (1950).
- (2) - C. Schmelzer, Z. Naturforschung, 7a, 808 (1952).
- (3) - M. Von Ardenne, Tabellen der Elektronenphysik, Jonanphysik und Übermikroskopie", Vol. I^o, 115, Deutsches Verlag der Wissenschaften, (1956).
- (4) - H. Reich, Z. angew. Phys. 12, 481 (1960).
- (5) - E. Kisdi-Koszò, L. Turi, Nucl. Instr. und Methods, 9, 137 (1960).
- (6) - S.P. Kapitza, V.P. Bykov, V.N. Melekin, Sov. Phys. JETP, 12, 692 (1961).
- (7) - S.P. Kapitza, V.P. Bykov, V.N. Melekin, Sov. Phys. JETP, 14, 266 (1962).
- (8) - R.W. Mueller, Nucl. Instr. and Methods, 23, 235 (1963).
- (9) - K.A. Belovintsev, A.Y. Belyak, S. Voroghtsov, P.A. Cerenkov; High Current Microtron, International Conference on High Energy Accelerators, Dubna (1963).

Capitolo 5 -

- (1) - P.A. Sturrock, Static and Dynamic Elektron Optics, Cambridge University Press (1955).
- (2) - E.M. Moroz, Doklady, Akad. Nauk, (S.S.S.R.), 108, 436 (1956).
- (3) - H. Bruck, Sur la possibilité de realizer un microtron de 200 MeV, de 50mA d'intensite moyenne et fonctionnant en regime quasi stationnaire, Rapport O.C. 60 (1958).
- (4) - F.T. Howard, A.H. Snell, B.S. Livingston, T.A. Welton, editors, Proposal for a Southern Regional Accelerator, Oak Ridge Nat. Lab. (1959); T.A. Welton, Bull Am. Phys. Soc. Sec. II, 3, 57 (1958).
- (5) - A. Roberts, Ann. of Phys. 4, 115 (1958).

Capitolo 6 -

- (1) - J.S. Bell, Proc. Phys. Soc. (London), B66, 802 (1953).
- (2) - G.M. Branch, IRE Trans. on Electron Devices, 8, 193 (1961).
- (3) - V.N. Melekin, Sov. Phys. JETP, 15, N. 2, 433 (1962).
- (4) - V.N. Melekin, Particle Dynamics in the Microtron, International Conference on High-Energy Accelerators, Dubna (1963).

Appendice 1 -

- (1) - K.A. Belovintzev, P.A. Cerenkov, Positron-Microtron, International Conference on High-Energy Accelerators, Dubna (1963).

Appendice 2 -

- (1) - S.P. Kapitza, V.N. Melekin, I.G. Krutikova, G.P. Prudkovskii, Sov. Phys. JETP, 14, 272 (1962).